[1]

1．題意より

$$①\begin{cases} A>0,\ B>0,\ C>0 \\ A+B+C=\pi \end{cases}$$

だから

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

また　$\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

なので

$$(\text{左辺})=2\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=(\text{右辺})$$

[終]

2．①より，上と同様に考えて

$$\cos A+\cos B=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

また　$\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$$=1-2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

なので

$$(\text{左辺})=1+2\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=(\text{右辺})$$

[終]

3．①より　$A\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$，$B\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$，$C\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$のとき

$$\begin{aligned}\tan C&=\tan(\pi-A-B)\\&=-\tan(A+B)\\&=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\end{aligned}$$

これより

$$\tan A\tan B\tan C-\tan C=\tan A+\tan B$$
$$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

[終]

(注)　$\tan A\tan B=1$ と仮定すると

(i)　$\tan A<0$ のとき　$\tan B<0$ と ① から $A>\frac{\pi}{2}$，$B>\frac{\pi}{2}$ となり ① に反する。

(ii)　$\tan A>0$ のとき　$\tan B>0$ と ① から $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$ であって

$$\tan B=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$$

だから，$B=\frac{\pi}{2}-A \Leftrightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$ となり，これと ① から $C=\frac{\pi}{2}$ となって $C\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$ に反する。

よって，$1-\tan A\tan B\fallingdotseq 0$ である。

[2]

1． $$f(x)=x^3-3a^2x$$

から　$f'(x)=3x^2-3a^2$

なので，題意より

l_1 の方程式は　$y=-3a^2x$　…[答]

l_2 の方程式は　$y=(3p^2-3a^2)(x-p)+p^3-3a^2p$

$\therefore\ y=(3p^2-3a^2)x-2p^3$　…[答]

2．Q は l_1，l_2 の交点ゆえ

$$-3a^2x=(3p^2-3a^2)x-2p^3$$

$\Leftrightarrow\quad 3p^2x=2p^3$

$p\fallingdotseq 0$ なのだから

$$x=\frac{2}{3}p$$

よって

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3}p,\ -2a^2p\right)$$　…[答]

3．題意と２．の結果より

$$S+T=(\triangle\mathrm{OPQ})=\frac{1}{2}\left|-2a^2p^2-\frac{2}{3}p(p^3-3a^2p)\right|$$
$$=\frac{1}{3}p^4$$

また直線OP：$y=(p^2-3a^2)x$ なので

$$x^3-3a^2x-(p^2-3a^2)x=x^3-p^2x=(x-p)x(x+p)$$

は 0 と p の間の x に対しては定符号である。

よって，$S=\left|\int_0^p(x^3-p^2x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}p^2x^2\right]_0^p\right|=\frac{p^4}{4}$

なので

$$T=\frac{1}{12}p^4$$

$$\therefore\ S:T=\frac{1}{4}:\frac{1}{12}=3:1$$

となり，この比は一定である。　[終]

高松高等予備校

[3]

1．題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta+2\sin\theta\\ 2\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix} \quad \cdots①$$

なので

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2&=(\cos\theta+2\sin\theta)^2+(2\cos\theta+\sin\theta)^2\\&=5+8\sin\theta\cos\theta\\&=5+4\sin2\theta\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ から　$0<2\theta<2\pi$ …②

なので

$$1\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=5+4\sin2\theta\leqq9$$

$$\therefore\ 1\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\leqq3 \quad \cdots[答]$$

2．題意と①より

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{OPQ})&=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\right|\\&=|\cos2\theta|\end{aligned}$$

②より

$$-1\leqq\cos2\theta<1$$

なので，△OPQ の面積は

$2\theta=\pi$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ …[答]

のとき最大値　1 …[答]

をとる。

3．1． 2． の考察より

求める長さは

$$\frac{2(\triangle\mathrm{OPQ})}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}=\frac{2|\cos2\theta|}{\sqrt{5+4\sin2\theta}} \quad \cdots[答]$$

4． $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

とおくと

$$\begin{cases} A\vec{a}=3\vec{a} \\ A\vec{b}=-\vec{b} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} A^n\vec{a}=3^n\vec{a} \\ A^n\vec{b}=(-1)^n\vec{b} \end{cases} \quad \cdots ③$$

であることに注意する。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{a}+\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{b}$$

と表されるから，題意と③より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}&=A^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\\&=\frac{3^{n-1}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{a}+\frac{(-1)^{n-1}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{b}\end{aligned}$$

P_n がすべての自然数 n について一直線上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{2}\left\{3^{k-2}\vec{a}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-(-1)^{k-2}\vec{b}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (k\geqq 2)$$

はすべて

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\sqrt{2}\left\{\vec{a}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\vec{b}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

に平行である。よって

$$\begin{cases} 3^{k-2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=t\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\ (-1)^{k-2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=t\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

なる実数 t が存在することより，t を消去して

$$\{3^{k-2}-(-1)^{k-2}\}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

これが $k\geqq 2$ なるすべての自然数 k について成り立つことから

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$0<\theta<\pi$ から $-\frac{\pi}{2}<2\theta-\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$ なので，$2\theta-\frac{\pi}{2}=0,\ \pi$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}, \ \dfrac{3}{4}\pi$ …[答]

高松高等予備校