[1]

1．与式から

$$2\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}) \qquad \cdots①$$

$$\therefore\ |2\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}|^2$$

また題意から

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1 \qquad \cdots②$$

だから

$$4=1+3+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

これより　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　…③

次に①，②，③より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB})\\&=-\frac{1}{2}(1+0)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \cdots[答]$$

2．1．の結果と②より

$$\begin{cases}\cos\angle AOB=0\\ \cos\angle AOC=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}\\ \angle AOC=\dfrac{2}{3}\pi\end{cases} \qquad \cdots[答]$$

3．2．の結果と題意より

$$\angle BOC=\frac{5}{6}\pi \qquad \cdots④$$

よって ②も用いて

$$(\triangle ABC)=(\triangle AOB)+(\triangle BOC)+(\triangle COA)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$ …[答]

4．②，④より

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=1+1-2\cos\frac{5}{6}\pi$$
$$=2+\sqrt{3}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$ …[答]

同様に $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

また，２．の結果と題意より

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，求める長さは

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|\sin\angle ABC$$
$$=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

１． 題意より

$$a_n=1+\frac{2}{7}(n-1)=\frac{2n+5}{7} \qquad \cdots[答]$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{2}\left(1+\frac{2n+5}{7}\right)=\frac{n(2n+12)}{14}=\frac{n(n+6)}{7} \qquad \cdots[答]$$

２． １.の結果から

$$a_7=\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}$$

$$a_{14}=4+\frac{5}{7}$$

$$a_{15}=5$$

だから，題意より

$$\begin{cases} b_7=2 \\ b_{14}=4 \\ b_{15}=5 \end{cases} \qquad \cdots[答]$$

３．　自然数nについて

$$\begin{cases} n=7k+r \\ 1\leqq r\leqq 7 \end{cases}$$

なる整数k，rが存在し，１.の結果より

$$a_n=\frac{2(7k+r)+5}{7}=\frac{2r+5}{7}+2k=a_r+2k$$

これと

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=\left(1,\ \frac{9}{7},\ \frac{11}{7},\ \frac{13}{7},\ \frac{15}{7},\ \frac{17}{7},\ \frac{19}{7}\right)$$

より

$$b_n=2k+[a_r]$$

$$=\begin{cases} 2k+1 & (1\leqq r\leqq 4) \\ 2k+2 & (5\leqq r\leqq 7) \end{cases} \quad \cdots ①$$

ここで

$$100=7\times 14+2 \quad \cdots ②$$

より

$$b_{100}=2\times 14+1=29 \quad \cdots [答]$$

①より

$$\sum_{j=7k+1}^{7k+7} b_j=4(2k+1)+3(2k+2)=14k+10$$

これをS_kとおくと①，②より

$$\sum_{k=1}^{100} b_k=\sum_{k=0}^{13} S_k+b_{99}+b_{100}$$

$$=\sum_{k=0}^{13}(14k+10)+29\times 2$$

$$=\frac{14}{2}(10+14\times 13+10)+58$$

$$=1472 \quad \cdots [答]$$

[3]

１．　$x^3-1=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1)=0$

だから，題意より $\boldsymbol{\omega}$ は２次方程式

$$x^2+x+1=0 \qquad \cdots①$$

の解である。よって

$$\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\omega}+1=0 \qquad \cdots[答]$$

２．　1. の結果と $\boldsymbol{\omega}^3=1$ より

$$\begin{aligned}&(a+b\boldsymbol{\omega})(a+b\boldsymbol{\omega}^2)\\&=a^2+ab\boldsymbol{\omega}+ab\boldsymbol{\omega}^2+b^2\boldsymbol{\omega}^3\\&=a^2+ab(-1)+b^2\\&=a^2-ab+b^2 \qquad \cdots[答]\end{aligned}$$

３．　1. の結果から

$$\begin{aligned}&(1+2\boldsymbol{\omega})(c+d\boldsymbol{\omega})\\&=c+(2c+d)\boldsymbol{\omega}+2d(-1-\boldsymbol{\omega})\\&=(c-2d)+(2c-d)\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}c=-\dfrac{1}{3}\\[2ex] d=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

であれば

$$\begin{cases}c-2d=1\\2c-d=0\end{cases}$$

なので

$$(1+2\boldsymbol{\omega})(c+d\boldsymbol{\omega})=1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1+2\boldsymbol{\omega}}=c+d\boldsymbol{\omega}$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\omega} \qquad \cdots[答]$$

4． $\begin{cases} z=m+n\omega \\ \dfrac{1}{z}=p+q\omega \end{cases}$

だから 1. の結果より

$$\begin{aligned}1&=(m+n\omega)(p+q\omega)\\&=mp+(mq+np)\omega+nq(-1-\omega)\\&=(mp-nq)+(mq+np-nq)\omega\end{aligned}$$

いま，$mq+np-nq\neq 0$ と仮定すると

$$\omega=\frac{1-mp+nq}{mq+np-nq}$$

と，m, n, p, q が整数であることから ω が有理数となるが，

これは，①の判別式 D が

$$D=1-4=-3<0$$

より ω が虚数であることに反する。

よって

$$\begin{cases} mp-nq=1 & \cdots② \\ mq+np-nq=0 & \cdots③ \end{cases}$$

なので②より m, n は互いに素であり

③より

$$mq=n(q-p)$$

なので

$$\begin{cases} q=kn \\ q-p=km \end{cases}$$

なる整数 k が存在し，このとき，

$$p=k(n-m)$$

だから，②より

$$k\{m(n-m)-n^2\}=1$$

ここで

$$m^2+n^2-mn$$

$$=\left(m-\frac{1}{2}n\right)^2+\frac{3}{4}n^2$$

と m, n は自然数より

$$m^2+n^2-mn\geqq 1$$

よって

$$mn-m^2-n^2 \leqq -1$$

だから

$$k=mn-m^2-n^2=-1$$

したがって

$$\begin{cases} k=-1 \\ \left(m-\dfrac{1}{2}n\right)^2+\dfrac{3}{4}n^2=1 \end{cases}$$

だから

$$m=n=1$$

である他なく

$$z=1+\omega$$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1．（ｉ）より $y=f(x)$ と直線 $y=5(x-2)+3=5x-7$ は点 $(2,\ 3)$ において接するから題意より

$$f(x)-5x+7=(x-2)^2(ax+p)$$
$$=ax^3+(-4a+p)x^2+4(a-p)x+4p$$

なる定数 p が存在する。これより

$$①\begin{cases} b=-4a+p \\ c=4(a-p)+5 \\ d=4p-7 \end{cases}$$

一方，（ii）より

$$f(x)-1=(x-1)^2(ax+q)$$
$$=ax^3+(-2a+q)x^2+(a-2q)x+q$$

なる定数 q が存在するから

$$②\begin{cases} b=-2a+q \\ c=a-2q \\ d=q+1 \end{cases}$$

①，②より

$$(a,\ p,\ q)=(1,\ 2,\ 0)$$

$\therefore$ $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ -2,\ 1,\ 1)$ …[答]

2．1．の結果より

$$f(x)=x^3-2x^2+x+1$$

だから

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$
$$=(x-1)(3x-1)$$

よって増減は

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

これと $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{31}{27}$，$f(1)=1$ より

$$\begin{cases} \text{極大値 } \dfrac{31}{27} \\ \text{極小値 } 1 \end{cases}$$

…[答]

高松高等予備校

[5]

1． $$t=\sin x+\cos x \qquad \cdots ①$$

から

$$t^2=1+2\sin x\cos x$$

なので，与式から

$$f(x)=\frac{2at}{1+t^2-at} \qquad \cdots [答]$$

2．①から

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

これと $0\leqq x\leqq 2\pi$ より

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2} \qquad \cdots ②$$

なので，$0<a<2$ …③

から

$$1+t^2-at=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4-a^2}{4}>0$$

であることに注意する。

$$g(t)=\frac{2at}{t^2-at+1}$$

から

$$g'(t)=\frac{2a\{t^2-at+1-t(2t-a)\}}{(t^2-at+1)^2}$$
$$=\frac{2a(1-t)(1+t)}{(t^2-at+1)^2}$$

よって，増減表は

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		↘	極小	↗	極大	↘	

ここで，③より

$$g(-\sqrt{2})=\frac{-2\sqrt{2}\,a}{3+\sqrt{2}\,a}<0<g(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}\,a}{3-\sqrt{2}\,a}$$

だから，$g(t)$ は

$$\begin{cases} t=1 \text{ のとき 最大値 } g(1)=\dfrac{2a}{2-a} \\ t=-1 \text{ のとき 最小値 } g(-1)=\dfrac{-2a}{2+a} \end{cases}$$ …[答]

をとる。

3．i） $t=-1$ のとき　1．の考察より

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=-1 \\ 2\sin x\cos x=0 \end{cases}$$

だから

$$(\cos x,\ \sin x)=(-1,\ 0),\ (0,\ -1)$$

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$$x=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

ii） $t=1$ のとき　同様に

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=1 \\ 2\sin x\cos x=0 \end{cases}$$

だから

$$(\cos x,\ \sin x)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$$

$$\begin{cases} \text{最大値} \cdots x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ 2\pi \\ \text{最小値} \cdots x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$ …[答]

高松高等予備校