

[1]

1. 与式から

$$2\overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}) \quad \dots\textcircled{1}$$

$$\therefore |2\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}|^2$$

また題意から

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \quad \dots\textcircled{2}$$

だから

$$4 = 1 + 3 + 2\sqrt{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{これより } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad \dots\textcircled{3}$$

次に①, ②, ③より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}) \\ &= -\frac{1}{2}(1+0) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

2. 1. の結果と②より

$$\begin{cases} \cos \angle AOB = 0 \\ \cos \angle AOC = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} \angle AOB = \frac{\pi}{2} \\ \angle AOC = \frac{2}{3}\pi \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

3. 2. の結果と題意より

$$\angle BOC = \frac{5}{6}\pi \quad \dots\textcircled{4}$$

よって②も用いて

$$\begin{aligned}
(\triangle ABC) &= (\triangle AOB) + (\triangle BOC) + (\triangle COA) \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{5}{6} \pi + \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3} \pi \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

4. ②, ④より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BC}|^2 &= 1 + 1 - 2 \cos \frac{5}{6} \pi \\
&= 2 + \sqrt{3} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \\
\therefore |\overrightarrow{BC}| &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

同様に $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
また, 2. の結果と題意より

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\pi}{3}$$

ゆえに, 求める長さは

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{BA}| \sin \angle ABC \\
&= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

高松高等予備校

[2]

1. 題意より

$$a_n = 1 + \frac{2}{7}(n-1) = \frac{2n+5}{7} \quad \dots[\text{答}]$$

よって

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{2n+5}{7} \right) = \frac{n(2n+12)}{14} = \frac{n(n+6)}{7} \quad \dots[\text{答}]$$

2. 1.の結果から

$$a_7 = \frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$$

$$a_{14} = 4 + \frac{5}{7}$$

$$a_{15} = 5$$

だから, 題意より

$$\begin{cases} b_7 = 2 \\ b_{14} = 4 \\ b_{15} = 5 \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

3. 自然数 n について

$$\begin{cases} n = 7k + r \\ 1 \leq r \leq 7 \end{cases}$$

なる整数 k, r が存在し, 1.の結果より

$$a_n = \frac{2(7k+r)+5}{7} = \frac{2r+5}{7} + 2k = a_r + 2k$$

これと

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \left(1, \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

より

$$\begin{aligned} b_n &= 2k + [a_r] \\ &= \begin{cases} 2k + 1 & (1 \leq r \leq 4) \\ 2k + 2 & (5 \leq r \leq 7) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$100 = 7 \times 14 + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

より

$$b_{100} = 2 \times 14 + 1 = 29 \quad \dots [\text{答}]$$

①より

$$\sum_{j=7k+1}^{7k+7} b_j = 4(2k+1) + 3(2k+2) = 14k + 10$$

これを S_k とおくと①, ②より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} b_k &= \sum_{k=0}^{13} S_k + b_{99} + b_{100} \\ &= \sum_{k=0}^{13} (14k + 10) + 29 \times 2 \\ &= \frac{14}{2}(10 + 14 \times 13 + 10) + 58 \\ &= 1472 \end{aligned} \quad \dots [\text{答}]$$

[3]

1.
$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

から、 t に関する微分を”'”で表して、

$$\begin{cases} x' = (-\sin t + \cos t)e^t \\ y' = (\sin t + \cos t)e^t \end{cases}$$

よって

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t)e^t \\ (\cos t + \sin t)e^t \end{pmatrix} \quad \dots[\text{答}]$$

であり、

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= e^{2t}(1 - 2\cos t \sin t + 1 + 2\cos t \sin t) \\ &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

から、 $|\vec{v}| = \sqrt{2}e^t \quad \dots[\text{答}]$

2. 1. の結果より $t = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\vec{v} = e^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{4}\pi \\ \sin \frac{3}{4}\pi \end{pmatrix}$$

だから $\alpha = \frac{3}{4}\pi$

3. 1. の結果から

$$\vec{v} = \sqrt{2}e^t \begin{pmatrix} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

だから

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{\text{OP}} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{\text{OP}}| |\vec{v}|} = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos t + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin t = \cos \frac{\pi}{4}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ として十分だから、 $\theta = \frac{\pi}{4}$

となり、 θ は一定である。

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

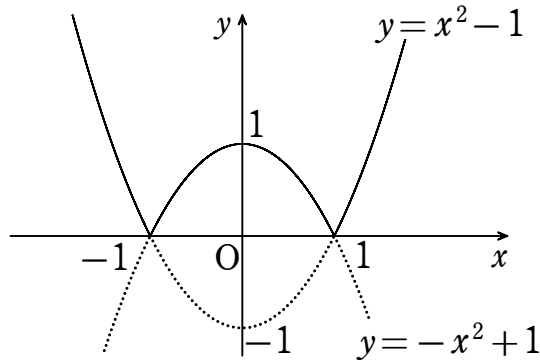
[終]

…[答]

高松高等予備校

[4]

1.



…[答]

2. $0 \leq x \leq 1$ では $y = -x^2 + 1$ だから題意より

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (1-y) dy \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}(1-y)^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

…[答]

また $1 \leq x$ では $y = x^2 - 1$ だから $b = a^2 - 1$ として

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^b (a^2 - x^2) dy \\ &= \pi \int_0^b (b - y) dy \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}(b-y)^2 \right]_0^b \\ &= \frac{\pi}{2} b^2 \\ &= \frac{\pi}{2} (a^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

…[答]

3. 2. より

$$V_1 = V_2$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a^2 - 1)^2$$

$a > 1$ から

$$a^2 - 1 = 1$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

…[答]

高松高等予備校