

[1]

1. 題意より

$$\begin{cases} 2\vec{OL} = \vec{b} + \vec{c} \\ 2\vec{OM} = \vec{c} + \vec{a} \\ 2\vec{ON} = \vec{a} + \vec{b} \end{cases}$$

だから与式より

$$\sqrt{3}(\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} + \vec{a}) + (2 + \sqrt{3})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

$$(\sqrt{3} + 3)\vec{a} + 2(1 + \sqrt{3})\vec{b} + (1 + \sqrt{3})\vec{c} = \vec{0}$$

$$\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

…①

よって

$$\vec{c} = -\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b}$$

…[答]

2. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ だから, 1. の結果より

$$|\vec{c}|^2 = |-\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b}|^2$$

$$|\vec{c}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$1 = 3 + 4 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

…[答]

3. 2. の結果から

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = 150^\circ$$

…[答]

また 1. の考察から外心 O は $\triangle ABC$ の内部にあるから

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 75^\circ$$

…[答]

4. ①より

$$\begin{cases} 2\vec{b} = -\sqrt{3}\vec{a} - \vec{c} \\ \sqrt{3}\vec{a} = -2\vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ 3 = 4 + 1 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \angle COA = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \cos \angle BOC = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \angle COA = 90^\circ \\ \angle BOC = 120^\circ \end{cases}$$

したがって求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA \\ &= \frac{1}{2} \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[2]

1. 題意より

$$S_1 = a_1$$

だから

$$S_n + na_n = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

より

$$a_1 + a_1 = 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$n \geq 2$ のとき①より

$$S_n + na_n - \{S_{n-1} + (n-1)a_{n-1}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)a_n = n(n-1)a_{n-1}$$

これを繰り返し用いると

$$n(n+1)a_n = 2a_1 = 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

したがって

$$a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{12}$$

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \quad \dots[\text{答}]$$

2. 1. の考察より

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるから

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n(n+1)} \\ S_n = \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1. $A=B$ と仮定すると

$$t^2 = t - 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$$

となるが、このような実数 t は存在しない。

よって、各実数 t に対して、 A と B は異なる点である。

[終]

$$2. \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 + t - 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ t+1 \end{pmatrix}$$

から

$$\textcircled{1} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -(t^2 - t + 2)(t-1)^2 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = (t-1)^2(t+1) - 3 = t^3 - t^2 - t - 2 = (t-2)(t^2 + t + 1) \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -(t+1)(t^2 - t + 2) \end{cases}$$

ここで、1. より $t^2 - t + 2 > 0$

$$\text{また、} t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

なので、 $\triangle ABC$ が直角三角形となる条件

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) = 0$$

より $t = \pm 1, 2$

…[答]

3. 題意のようになる条件は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} < 0, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} < 0$$

なので、 $\textcircled{1}$ 及び $\begin{cases} t^2 - t + 2 > 0 \\ t^2 + t + 1 > 0 \end{cases}$ から

$$t \neq 1, \quad t < 2, \quad t > -1$$

したがって

$$-1 < t < 1, \quad 1 < t < 2$$

…[答]

[4]

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

より

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

だから

$$\begin{aligned} A &= \frac{f'(p) + f'(q)}{2} \\ &= \frac{3}{2}a(p^2 + q^2) + b(p + q) + c \end{aligned}$$

…[答]

2. 1. と同様に

$$\begin{aligned} B &= 3a\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + 2b\left(\frac{p+q}{2}\right) + c \\ &= \frac{3}{4}a(p+q)^2 + b(p+q) + c \\ C &= \frac{a(p^3 - q^3) + b(p^2 - q^2) + c(p - q)}{p - q} \\ &= a(p^2 + q^2 + pq) + b(p + q) + c \end{aligned}$$

よって, $a > 0$ から

$$C - B = \frac{a}{4}(p - q)^2 > 0$$

$$A - C = \frac{a}{2}(p - q)^2 > 0$$

よって

$$B < C < A$$

…[答]

である。