[1]

1．題意より　$b=-3a^2+2ap+q$

なので　$q=3a^2-2ap+b$

また，α, β は x の２次方程式

$$x^2=-3x^2+2px+3a^2-2ap+b$$

$$\Longleftrightarrow\ 4x^2-2px-3a^2+2ap-b=0 \qquad \cdots①$$

の２つの解なので，$\alpha<\beta$より

$$\beta-\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{p^2-8ap+12a^2+4b}$$

したがって，求める面積 S は

$$S=-\int_\alpha^\beta 4(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{2}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}(p^2-8ap+12a^2+4b)^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots[答]$$

2．

$$p^2-8ap+12a^2+4b$$

$$=(p-4a)^2+4(b-a^2)$$

と $b>a^2$より

S は $p=4a$ のとき 最小値 $\frac{2}{3}(b-a^2)^{\frac{3}{2}}$ をとる。　…[答]

3．２.のとき ①は

$$4x^2-8ax+5a^2-b=0$$

となり

$$\alpha+\beta=2a,\quad \beta-\alpha=\sqrt{b-a^2}$$

なので　$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ は

$$\mathrm{M}\left(a,\ \frac{3a^2+b}{4}\right)$$

$$\therefore\quad \mathrm{PM}=\frac{3}{4}(b-a^2) \qquad \cdots[答]$$

4．直線ABの傾きは

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta=2a$$

また C_2：$y=-3x^2+8ax-5a^2+b$

について　$y'=-6x+8a$

から，点P$(a,\ b)$における接線の傾きは $2a$

$\therefore\quad \ell \parallel \mathrm{AB}$　…[答]

高松高等予備校

[2]

1． $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ とおくと

$$A\vec{a}=2\vec{a}\ ,\ \ A\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore\quad A^{n-1}\vec{a}=2^{n-1}\vec{a}\ ,\ \ A^{n-1}\vec{b}=\frac{1}{2^{n-1}}\vec{b}\ \ (n\geqq 2) \qquad \cdots①$$

また，$\overrightarrow{x_n}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ とおくと

$$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

であり，題意から $n\geqq 2$ のとき

$$\overrightarrow{x_n}=A^{n-1}\overrightarrow{x_1}=\frac{1}{2}A^{n-1}(\vec{a}+\vec{b})$$

なので①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_n}&=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\vec{a}+\frac{1}{2^{n-1}}\vec{b}\right)\\&=2^{n-2}\vec{a}+\frac{1}{2^n}\vec{b}\\&=\begin{pmatrix}2^{n-2}+\dfrac{1}{2^n}\\2^{n-2}-\dfrac{1}{2^n}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって $\mathrm{P}_n\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^n},\ 2^{n-2}-\frac{1}{2^n}\right)$

$$\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^n}\right)^2-\left(2^{n-2}-\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

であるから，点P_n はすべて双曲線

$$x^2-y^2=1 \qquad \cdots②$$

上にある。②は $\mathrm{P}(x,\ y)$ として

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2$$

をみたす点Pの軌跡であるから

$$|\mathrm{P}_n\mathrm{F}-\mathrm{P}_n\mathrm{F}'|=2 \qquad \cdots[答]$$

２．１．の考察より

$x^2-y^2=1$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．題意より

$$I=\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+J \quad \cdots①$$

$$J=\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x+\int e^{-x}(-\sin x)dx=-e^{-x}\cos x-I \quad \cdots②$$

よって，①+② より

$$I=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-I$$
$$\therefore\ I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C \ (C\text{は積分定数}) \quad \cdots[答]$$

2．$\theta=x-2n\pi$

とおくと

x	$2n\pi$	$\to$	$(2n+1)\pi$
θ	0	$\to$	π

，$dx=d\theta$

なので

$$S_{2n}=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx$$
$$=e^{-2n\pi}\int_0^{\pi}e^{-\theta}|\sin(\theta+2n\pi)|d\theta$$
$$=e^{-2n\pi}\int_0^{\pi}e^{-\theta}\sin\theta\,d\theta \qquad (0\leqq\theta\leqq\pi\text{では}\sin\theta\geqq 0\text{なので})$$
$$=e^{-2n\pi}\Big[I\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^{-2n\pi} \quad \cdots[答]$$

3．$\theta=x-(2n+1)\pi$

とおくと

x	$(2n+1)\pi$	$\to$	$2(n+1)\pi$
θ	0	$\to$	π

，$dx=d\theta$

なので，２．と同様に

$$
\begin{aligned}
S_{2n+1}&=\int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx\\
&=e^{-(2n+1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-\theta}|\sin\{\theta+(2n+1)\pi\}|d\theta\\
&=e^{-(2n+1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-\theta}\sin\theta d\theta\\
&=e^{-(2n+1)\pi}\Big[I\Big]_0^{\pi}\\
&=\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^{-(2n+1)\pi}
\end{aligned}
$$
…[答]

４．２．３．よりいずれにしても

$$S_n=\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^{-n\pi} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

よって，$\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ は初項 $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$，公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数で

$0<e^{-\pi}<1$ より収束する。

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \sum_{k=0}^{\infty} S_k&=\frac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}\\
&=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}
\end{aligned}
$$
…[答]

高松高等予備校