[1]

1．題意より

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\vec{b}+\vec{c} \\ 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{c}+\vec{a} \\ 2\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{a}+\vec{b} \end{cases}$$

だから与式より

$$\sqrt{3}(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})+(2+\sqrt{3})(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$$

$$(\sqrt{3}+3)\vec{a}+2(1+\sqrt{3})\vec{b}+(1+\sqrt{3})\vec{c}=\vec{0}$$

$$\sqrt{3}\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \qquad \cdots①$$

よって

$$\vec{c}=-\sqrt{3}\vec{a}-2\vec{b} \qquad \cdots[答]$$

2．$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ だから，１．の結果より

$$|\vec{c}|^2=|-\sqrt{3}\vec{a}-2\vec{b}|^2$$

$$|\vec{c}|^2=3|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$1=3+4+4\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots[答]$$

3．２．の結果から

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \angle\mathrm{AOB}=150° \qquad \cdots[答]$$

また１．の考察から外心Oは△ABCの内部にあるから

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=75° \qquad \cdots[答]$$

4．①より

$$\begin{cases} 2\vec{b} = -\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{c} \\ \sqrt{3}\,\vec{a} = -2\vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\,\vec{c}\cdot\vec{a} \\ 3 = 4 + 1 + 4\vec{b}\cdot\vec{c} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos\angle\mathrm{COA} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \\ \cos\angle\mathrm{BOC} = \vec{b}\cdot\vec{c} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \angle\mathrm{COA} = 90^\circ \\ \angle\mathrm{BOC} = 120^\circ \end{cases}$$

したがって求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \triangle\mathrm{AOB} + \triangle\mathrm{BOC} + \triangle\mathrm{COA} \\ &= \frac{1}{2}\sin 150^\circ + \frac{1}{2}\sin 120^\circ + \frac{1}{2}\sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[2]

1. 題意より

$$S_1=a_1$$

だから

$$S_n+na_n=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots①$$

より

$$a_1+a_1=1$$

$$\therefore \quad a_1=\frac{1}{2}$$

$n\geqq 2$ のとき①より

$$S_n+na_n-\{S_{n-1}+(n-1)a_{n-1}\}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad n(n+1)a_n=n(n-1)a_{n-1}$$

これを繰り返し用いると

$$n(n+1)a_n=2a_1=1$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

したがって

$$a_2=\frac{1}{6}, \qquad a_3=\frac{1}{12}$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12}\right) \qquad \cdots[答]$$

2. 1. の考察より

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \\ S_n = \dfrac{n}{n+1} \end{cases}$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1．A＝B と仮定すると

$$t^2=t-2$$
$$\Leftrightarrow t^2-t+2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{4}$$

となるが，このような実数 t は存在しない。
よって，各実数 t に対して，A と B は異なる点である。 [終]

2． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\-t^2+t-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\(t-1)^2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\t+1\end{pmatrix}$

から

$$① \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-(t^2-t+2)(t-1)^2\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(t-1)^2(t+1)-3=t^3-t^2-t-2=(t-2)(t^2+t+1)\\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-(t+1)(t^2-t+2)\end{cases}$$

ここで，1．より $t^2-t+2>0$

また，$t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

なので，△ABC が直角三角形となる条件

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}})(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$$

より　　$t=\pm1,\ 2$ …[答]

3．題意のようになる条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}<0,\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}<0,\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}<0$$

なので，①及び $\begin{cases}t^2-t+2>0\\t^2+t+1>0\end{cases}$ から

$$t\neq1,\ t<2,\ t>-1$$

したがって

$$-1<t<1,\ 1<t<2$$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1． $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ における 2 曲線

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad y=a^2-x^2$$

の交点について，まず $a>1$ より $0 \leqq x \leqq a$ であって

$$\sqrt{a^2-x^2}=a^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-x^2}\left(\sqrt{a^2-x^2}-1\right)=0$$

から

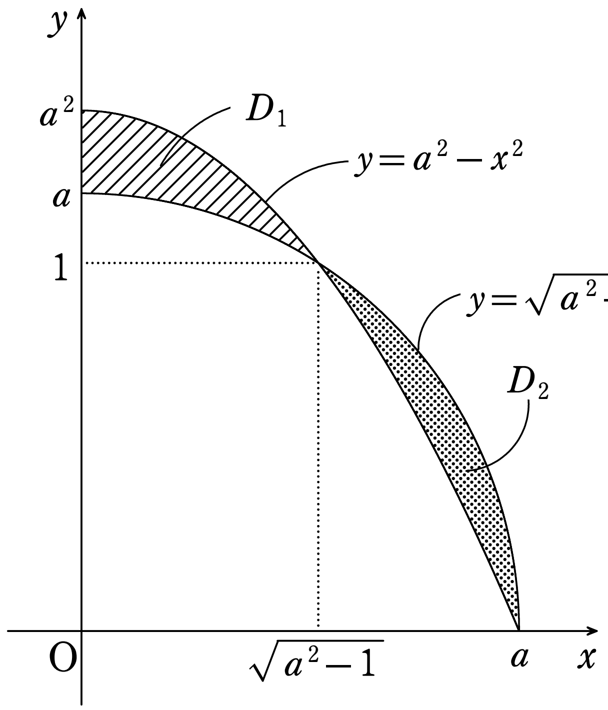
$$x=a,\quad \sqrt{a^2-1}$$

よって

$$\left(\sqrt{a^2-1},\ 1\right),\ (a,\ 0)$$

…[答]

2．



…[答]

3． $y_1=a^2-x^2$，$y_2=\sqrt{a^2-x^2}$ とおく。

$$V_1-V_2=\pi\int_0^{\sqrt{a^2-1}}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)dx-\pi\int_{\sqrt{a^2-1}}^{a}\left(y_2{}^2-y_1{}^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{a^2-1}}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)dx+\pi\int_{\sqrt{a^2-1}}^{a}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{a}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^a\{(a^2-x^2)^2-(a^2-x^2)\}dx$$

$$=\pi\int_0^a\{x^4-(2a^2-1)x^2+(a^4-a^2)\}dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2a^2-1}{3}x^3+(a^4-a^2)x\right]_0^a$$

$$=\pi\left\{\frac{a^5}{5}-\frac{2a^2-1}{3}a^3+(a^4-a^2)a\right\}$$

$$=\frac{2}{15}\pi a^3(4a^2-5)$$ …[答]

4．　$V_1-V_2<0$ より

$$4a^2-5<0$$

$$a^2<\frac{5}{4}$$

$a>1$ より

$$1<a<\frac{\sqrt{5}}{2}$$ …[答]

高松高等予備校