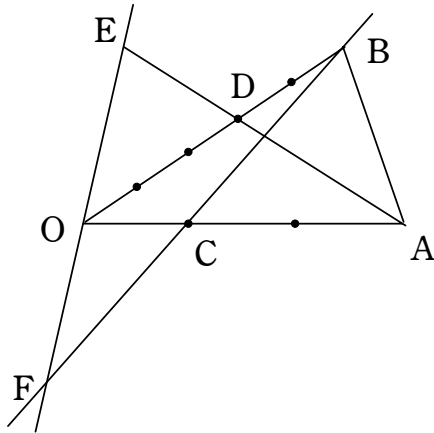


[1]



1. 題意より $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{5}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \vec{a} + \overrightarrow{AE} \\ &= \vec{a} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

…[答]

2. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}$ であるから, 題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= (1-t)\vec{b} + t\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right) \\ &= \frac{t}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

なる実数 t が存在し, また 1. とから

$$\overrightarrow{OF} = s\overrightarrow{OE} = -\frac{2s}{3}\vec{a} + s\vec{b}$$

なる実数 s が存在する。これと \vec{a} , \vec{b} が 1 次独立より

$$\begin{cases} \frac{t}{3} = -\frac{2s}{3} \\ 1-t = s \end{cases}$$

$$\therefore (s, t) = (-1, 2)$$

よって $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

…[答]

3. 2. の考察から

$$\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

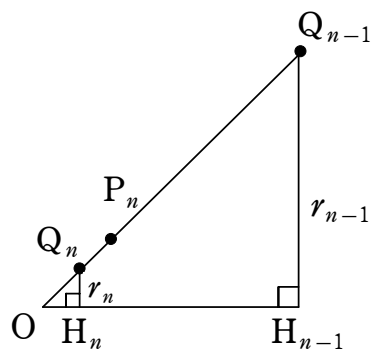
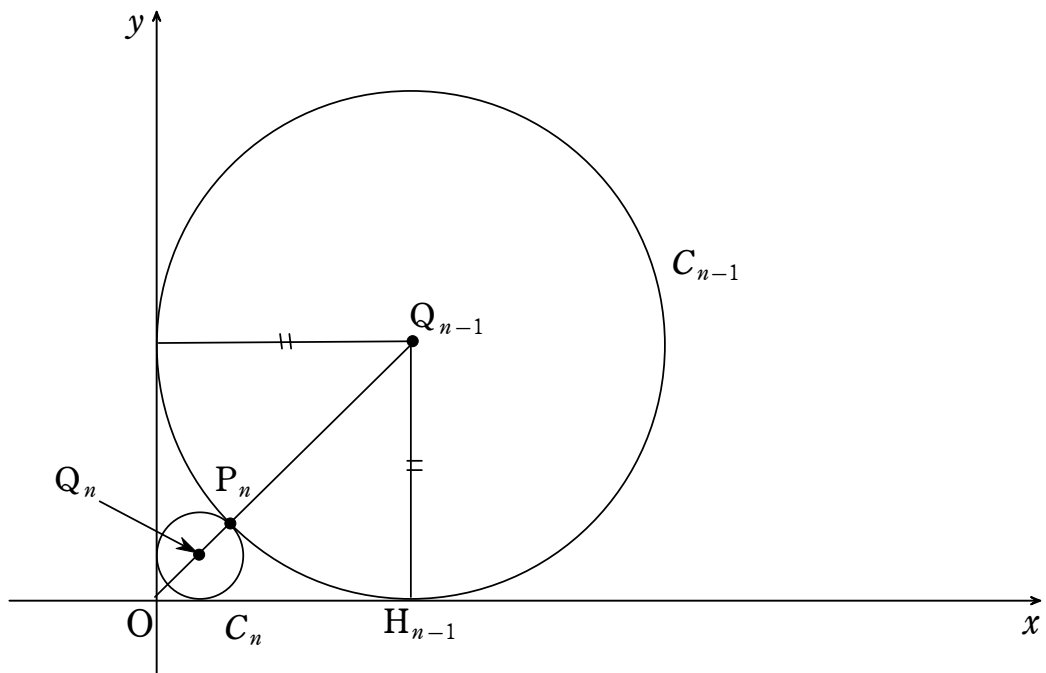
だから $BF : FC = 2 : 1$ (外分)

よって $FC : CB = 1 : 1$

…[答]

高松高等予備校

[2]



円 C_n の中心を Q_n とし、 Q_n から x 軸に下ろした垂線の足を H_n とする。
 $\triangle OH_nQ_n$ は直角二等辺三角形である。

$$OQ_n = \sqrt{2} r_n$$

$$Q_nP_n = r_n$$

$$P_nQ_{n-1} = r_{n-1}$$

$$OQ_{n-1} = \sqrt{2} r_{n-1}$$

となる。

$$\begin{aligned} 1. \quad OP_n &= OQ_n + Q_nP_n \\ &= (\sqrt{2} + 1)r_n \end{aligned}$$

…[答]

$$2. \quad \text{OQ}_{n-1} = \text{OP}_n + \text{P}_n\text{Q}_{n-1}$$

より

$$\sqrt{2} r_{n-1} = (\sqrt{2} + 1)r_n + r_{n-1}$$

$$(\sqrt{2} - 1)r_{n-1} = (\sqrt{2} + 1)r_n + r_{n-1}$$

$$\therefore r_n = (\sqrt{2} - 1)^2 r_{n-1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

よって、数列 $\{r_n\}$ は等比数列である。

[終]

3. 2. より、数列 $\{r_n\}$ は公比 $(\sqrt{2} - 1)^2$ 、初項 $r_1 = 1$ の等比数列だから

$$r_n = \{(\sqrt{2} - 1)^2\}^{n-1} r_1$$

$$= (\sqrt{2} - 1)^{2(n-1)}$$

だから

$$r_6 = (\sqrt{2} - 1)^{10}$$

C_6 の周上の点 X について三角不等式より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OX}}| &= |\overrightarrow{\text{OQ}_6} + \overrightarrow{\text{Q}_6\text{X}}| \\ &\leq |\overrightarrow{\text{OQ}_6}| + r_6 \\ &= \text{OP}_6 \\ &= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)^{10} \\ &= (\sqrt{2} - 1)^9 \\ &= (3 - 2\sqrt{2})^4(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

ここで

$$0 < 3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{5} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$$

だから

$$|\overrightarrow{\text{OX}}| < \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1250} < \frac{1}{1000}$$

よって、円 C_6 は、原点を中心とした半径 $\frac{1}{1000}$ の円の内部に含まれる。

[終]

[3]

1. C , ℓ の共有点について

$$x(x-a) = ax$$

$$\Leftrightarrow x(x-2a) = 0$$

$x=0$ のとき共有点は原点 $(0, 0)$ なので,

$x=2a$ のときの共有点 $(2a, 2a^2)$ のみ適する。

よって, 求める点の座標は

$$(2a, 2a^2)$$

…[答]

2. $C: y = x(x-a)$ について, $0 < x < a$ において $y < 0$

それ以外の x において $y \geq 0$ (等号は $x=0$, a のときのみ成り立つ)

だから, 求める面積は

$$\int_0^a \{-x(x-a)\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{6}a^3$$

…[答]

3. 1. の考察より

$$\begin{cases} 0 < x < 2a \text{ において} & x(x-a) < ax \\ x=0, 2a \text{ において} & x(x-a) = ax \\ x < 0, 2a < x \text{ において} & x(x-a) > ax \end{cases}$$

だから, 求める面積は

$$\int_0^{2a} \{ax - x(x-a)\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a}$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3} \right) a^3$$

$$= \frac{4}{3}a^3$$

…[答]

4. $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(2a, 2a^2)$ とする。

題意のようになるのは 2., 3. の考察より

線分 OB 上の点 $P(t, at)$ ($0 < t < 2a$) で

$$(\triangle OAP) = \frac{1}{2}a^3$$

となる点 P を通るときであるから

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot at = \frac{1}{2} a^3$$

$$\therefore t = a$$

よって、 $P(a, a^2)$ だから、求める方程式は

$$x = a$$

…[答]

[4]

1. $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 1$
 について

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax + 9a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$= 3a(x-1)(x-3)$$

だから、 $a > 0$ より増減表は

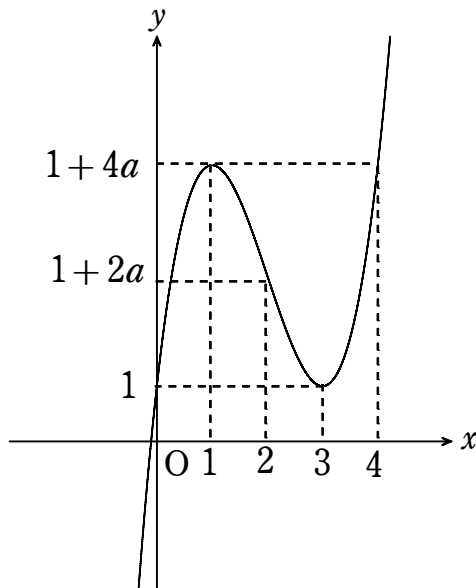
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これと

$$f(1) = 4a + 1 \quad (\text{極大値})$$

$$f(3) = 1 \quad (\text{極小値})$$

より、そのグラフは



2. ①より

$$f'(t) = 3a(t^2 - 4t + 3)$$

一方、題意より直線 AB の傾きは

$$\frac{f(t) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{at^3 - 6at^2 + 9at + 16a}{5}$$

$$= \frac{a}{5}(t^3 - 6t^2 + 9t + 16)$$

だから、点 C における曲線 $y = f(x)$ の接線と線分 AB とが平行になる

条件は

$$3a(t^2 - 4t + 3) = \frac{a}{5}(t^3 - 6t^2 + 9t + 16) \quad \dots(*)$$

$a > 0$ だから、これは

$$15(t^2 - 4t + 3) = t^3 - 6t^2 + 9t + 16$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 21t^2 + 69t - 29 = 0 \quad \dots②$$

が成り立つことである。②の左辺を $g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 42t + 69 \\ &= 3(t^2 - 14t + 23) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} g'(-1) = 3(15 + 23) > 0 \\ g'(3) = -30 < 0 \end{cases}$$

よって $\alpha = 7 - \sqrt{26}$ ($\alpha^2 = 14\alpha - 23$)

として、 $g(t)$ の増減は $-1 < t < 3$ において

t	-1	...	α	...	3
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	極大	↘	

となる。これと

$$\begin{cases} g(-1) = -1 - 21 - 69 - 29 < 0 \\ g(3) = 27 - 189 + 207 - 29 > 0 \end{cases}$$

より $\begin{cases} -1 < c < \alpha \\ g(c) = 0 \end{cases}$

となる実数 c が存在して

$$\begin{cases} -1 < t < c \text{ のとき } g(t) < 0 \\ c < t < 3 \text{ のとき } g(t) > 0 \end{cases}$$

であるから、(*)が成り立つような実数 t は $-1 < t < 3$ において1つだけ存在する。

よって、題意は示された。

[終]