[1]

1. $$B=6E-A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}6A-A^2&=A(6E-A)\\&=AB\\&=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\\&=9E\end{aligned}$$

だから

$$A^2-6A+9E=O$$

である。 [終]

2. i) $$A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \quad \cdots①$$

である。

ii) $$A^k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=3^k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

と仮定すると①より

$$\begin{aligned}A^{k+1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}&=3^kA\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\&=3^{k+1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

以上より，数学的帰納法によって，すべての自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

である。

次に題意より $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x_n = 3^{n-1} \\ y_n = -3^{n-1} \end{cases} \qquad \cdots[\text{答}]$$

3．1．より

$$(A-3E)^2 = O$$

であるから，二項定理より $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= \{3E+(A-3E)\}^n \\ &= 3^n E + 3^{n-1} n(A-3E) \\ &= n\cdot 3^{n-1}A + (-n+1)\cdot 3^n E \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときにも成り立つ。よって，自然数 n に対して

$$a_n A + b_n E = n\cdot 3^{n-1}A + (-n+1)\cdot 3^n E$$

が成り立つから各成分を比較すると

$$\begin{cases} a_n = n\cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1)\cdot 3^n \end{cases} \qquad \cdots[\text{答}]$$

[2]

1．この接線の方向ベクトルを$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ $(m^2+n^2>0)$とすると，接線上の点$(x,\ y)$について

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad \cdots①$$

なる実数tが存在し，これとC_1との共有点について

$$\left(\frac{x_1+tm}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1+tn}{b}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_1m}{a^2}+\frac{y_1n}{b^2}\right)t+\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}-1=0$$

が成り立つ。接線なので，このtの2次方程式は重解$t=0$をもつので，

$$\frac{x_1m}{a^2}+\frac{y_1n}{b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}-1=0 \qquad \cdots②$$

が成り立つ。よって

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{a^2} \\ \dfrac{y_1}{b^2} \end{pmatrix}$$

であるから，①の両辺と$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{a^2} \\ \dfrac{y_1}{b^2} \end{pmatrix}$の内積をとって②を用いると

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

[終]

2．$A_1(x_1,\ y_1)$，$A_2(x_2,\ y_2)$とすると，それぞれの点におけるC_1の接線の方程式は1．より

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

$$\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$$

であるが，これらは点$P(p,\ q)$を通るから

$$\begin{cases} \dfrac{px_1}{a^2}+\dfrac{qy_1}{b^2}=1 \\ \dfrac{px_2}{a^2}+\dfrac{qy_2}{b^2}=1 \end{cases}$$

が成り立つ。よって，直線

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

は2点 A_1，A_2 を通る。このような直線はただ1本に限るから，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

である。 [終]

3．直線 $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ …③，双曲線 C_2 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …④ の共有点について，$\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1$ が成り立つことから，

$$\frac{q^2}{a^2b^2}x^2-\left(1-\frac{px}{a^2}\right)^2=\frac{q^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{a^2}x^2+\frac{2p}{a^2}x-\frac{p^2}{a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-p)^2=0$$

よって，これは重解 $x=p$ をもつから，③は④に点 $(p,\ -q)$ において接する。 [終]

高松高等予備校

[3]

1．$C: y = x\sin x$ について

$$y' = \sin x + x\cos x$$

であるから，C 上の点 $(t, t\sin t)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (\sin t + t\cos t)(x - t) + t\sin t \\ &= (\sin t + t\cos t)x - t^2\cos t \end{aligned}$$

これが原点 $(0, 0)$ を通る条件は

$$0 = -t^2\cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 0, \frac{\pi}{2} + n\pi \ (\ n \text{ は整数})$$

よって求める方程式は

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \pm x \end{cases}$$

$y = 0$，$y = -x$，$y = x$ …[答]

2． $$2(n-1)\pi \leqq x \leqq 2n\pi \ (\ n = 1, 2, 3, \cdots\ )$$

において

$$x\sin x = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

を考えると，$x > 0$ のとき

$$x = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}, 2(n-1)\pi + \frac{5}{6}\pi$$

よって題意から，$P_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$)とすると

$$\begin{cases} x_{2n-1} = 2(n-1)\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x_{2n} = 2(n-1)\pi + \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$$

である。したがって

$$S_n = \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \left(x\sin x - \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[-x\cos x-\frac{1}{4}x^2\right]_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}+\int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}\cos x\,dx$$

$$=-\left\{2(n-1)\pi+\frac{5}{6}\pi\right\}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left\{2(n-1)\pi+\frac{\pi}{6}\right\}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\{4(n-1)\pi+\pi\}\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\Big[\sin x\Big]_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{4(n-1)\pi+\pi\}-\frac{\pi}{6}\{4(n-1)\pi+\pi\}$$

$$=\frac{\pi(3\sqrt{3}-\pi)(4n-3)}{6}$$ …[答]

3．点 $Q_n\left(\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi,\ \frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi\right)$ と直線 $y=\frac{1}{2}x$ との距離は

$$\frac{\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi}{\sqrt{1+2^2}}$$

また $\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n}}$ の x 成分は $\frac{2}{3}\pi$ なので

$$T_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi}{\sqrt{1+2^2}}$$

$$=\frac{\pi}{12}\{4(n-1)\pi+\pi\}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}(4n-3)$$

$$\therefore\quad \frac{S_n}{T_n}=\frac{2(3\sqrt{3}-\pi)}{\pi}$$

これは n によらず一定である。 [終]

高松高等予備校

[4]

1．$n=4m$ (m は自然数)のとき $1 \leqq k \leqq n$ なる整数 k について

$$k+(n-k+1)=4m+1 \text{ (一定)}$$

だから

$$\sum_{k=1}^{m}\{k+(n-k+1)\}=\sum_{k=m+1}^{2m}\{k+(n-k+1)\}=m(4m+1)$$

なので

$$A_n=\{1, 2, \cdots, m\} \cup \{n-m+1, n-m+2, \cdots, n\}$$
$$B_n=\{m+1, m+2, \cdots, n-m-1, n-m\}$$

とすれば

$$a_n=b_n=m(4m+1)=\frac{n(n+1)}{4}$$

となる。 [終]

2．$n=4m-1$ (m は自然数)のとき

命題

「 $a_n=b_n$ となるような A_n ， B_n が存在する」 $\cdots(*)$

を m に関する数学的帰納法で示す。

i） $m=1$ のとき

$$A_3=\{1, 2\}, \quad B_3=\{3\}$$

とすると

$$a_3=b_3=3$$

だから$(*)$は $m=1$ のとき成り立つ。

ii） $(*)$が $m=k$ のとき成り立つと仮定する。

$$a_{4k-1}=b_{4k-1}$$

となる

$$A_{4k-1}, \quad B_{4k-1}$$

が存在するから

$$4k+(4k+3)=(4k+1)+(4k+2)=8k+3$$

より

$$A_{4k+3}=A_{4k-1} \cup \{4k, 4k+3\}$$
$$B_{4k+3}=B_{4k-1} \cup \{4k+1, 4k+2\}$$

とおくと，A_{4k+3} ， B_{4k+3} は X_{4k+3} の $a_{4k+3}=b_{4k+3}$ となる

分け方を与えている。

ⅰ)，ⅱ)より(*)は

$$n=4m-1\ (m \text{ は自然数})$$

なるすべての n について成り立つ。 [終]

3．ⅰ) $n=4k+1$ (k は自然数)のとき

$$a_n+b_n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)=(4k+1)(2k+1)$$

$a_n=b_n$ と仮定すると

$$2a_n=(4k+1)(2k+1)$$

k, a_n は自然数なので，左辺は偶数，右辺は奇数となり矛盾。

ⅱ) $n=4k-2$ (k は自然数)のとき

$$a_n+b_n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)=(2k-1)(4k-1)$$

$a_n=b_n$ と仮定すると

$$2a_n=(2k-1)(4k-1)$$

ⅰ)と同様に矛盾。

ⅰ)，ⅱ)より n も $n+1$ も4の倍数ではないとき，$a_n=b_n$ となるようには X_n を分けられない。 [終]

高松高等予備校