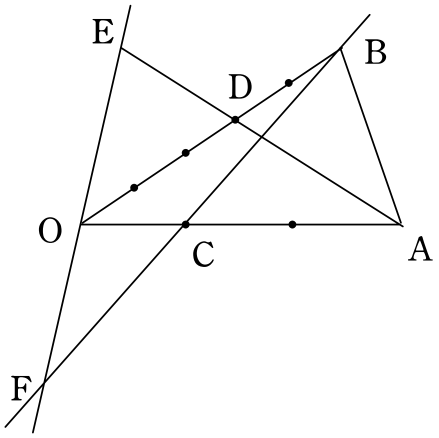
[1]




1．題意より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\vec{a}+\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

…[答]

2．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ であるから，題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=(1-t)\vec{b}+t\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

なる実数 $t$ が存在し，また１．とから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\frac{2s}{3}\vec{a}+s\vec{b}$$

なる実数 $s$ が存在する。これと$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立より

$$\begin{cases}\dfrac{t}{3}=-\dfrac{2s}{3}\\1-t=s\end{cases}$$

$\therefore\quad (s,\ t)=(-1,\ 2)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$

…[答]

３．２． の考察から

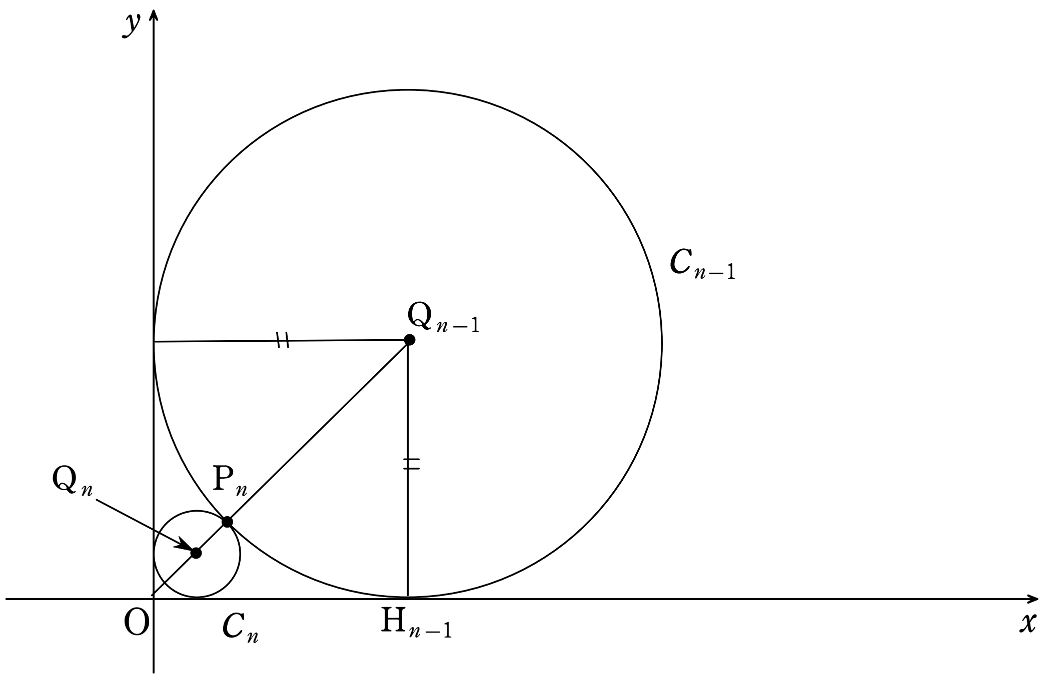
$$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

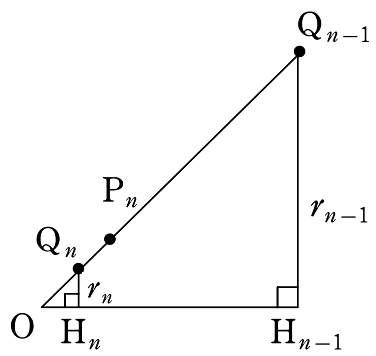
だから　　$BF:FC=2:1$　　（外分）

よって　　$FC:CB=1:1$　　…[答]

高松高等予備校

[2]




円 $C_n$ の中心を $\mathrm{Q}_n$ とし，$\mathrm{Q}_n$ から $x$ 軸に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}_n$ とする。
△ $\mathrm{OH}_n\mathrm{Q}_n$ は直角二等辺三角形である。

$$\mathrm{OQ}_n=\sqrt{2}\,r_n$$
$$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n=r_n$$
$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n-1}=r_{n-1}$$
$$\mathrm{OQ}_{n-1}=\sqrt{2}\,r_{n-1}$$

となる。

1．
$$\begin{aligned}\mathrm{OP}_n&=\mathrm{OQ}_n+\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\\&=(\sqrt{2}+1)r_n\end{aligned}$$
…[答]

２．　　$\mathrm{OQ}_{n-1}=\mathrm{OP}_n+\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n-1}$

より

$$\sqrt{2}\,r_{n-1}=(\sqrt{2}+1)r_n+r_{n-1}$$

$$(\sqrt{2}-1)r_{n-1}=(\sqrt{2}+1)r_n+r_{n-1}$$

$$\therefore\quad r_n=(\sqrt{2}-1)^2 r_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

よって，数列 $\{r_n\}$ は等比数列である。　[終]

３．２．より，数列 $\{r_n\}$ は公比 $(\sqrt{2}-1)^2$，初項 $r_1=1$ の等比数列だから

$$\begin{aligned} r_n &= \{(\sqrt{2}-1)^2\}^{n-1}r_1 \\ &= (\sqrt{2}-1)^{2(n-1)} \end{aligned}$$

だから

$$r_6=(\sqrt{2}-1)^{10}$$

$C_6$ の周上の点 X について三角不等式より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OX}}| &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ_6}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_6X}}| \\ &\leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ_6}}|+r_6 \\ &= \mathrm{OP}_6 \\ &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{10} \\ &= (\sqrt{2}-1)^9 \\ &= (3-2\sqrt{2})^4(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

ここで

$$0<3-2\sqrt{2}<\frac{1}{5}<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$$

だから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|<\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1250}<\frac{1}{1000}$$

よって，円 $C_6$ は，原点を中心とした半径 $\dfrac{1}{1000}$ の円の内部に含まれる。

[終]

高松高等予備校

[3]

1．$C$，$\ell$ の共有点について

$$x(x-a)=ax$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x-2a)=0$$

$x=0$ のとき共有点は原点 $(0,0)$ なので，

$x=2a$ のときの共有点 $(2a, 2a^2)$ のみ適する。

よって，求める点の座標は

$$(2a, 2a^2) \qquad \cdots[答]$$

2．$C: y=x(x-a)$ について，$0<x<a$ において $y<0$

それ以外の $x$ において $y\geqq 0$ (等号は $x=0$，$a$ のときのみ成り立つ)

だから，求める面積は

$$\int_0^a\{-x(x-a)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{6}a^3 \qquad \cdots[答]$$

3．1．の考察より

$$\begin{cases} 0<x<2a \text{ において} & x(x-a)<ax \\ x=0,\ 2a \text{ において} & x(x-a)=ax \\ x<0,\ 2a<x \text{ において} & x(x-a)>ax \end{cases}$$

だから，求める面積は

$$\int_0^{2a}\{ax-x(x-a)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_0^{2a}$$
$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)a^3$$
$$=\frac{4}{3}a^3 \qquad \cdots[答]$$

4．O$(0,0)$，A$(a,0)$，B$(2a, 2a^2)$ とする。

題意のようになるのは２．，３．の考察より

線分 OB 上の点 P$(t, at)$ $(0<t<2a)$ で

$$(\triangle \mathrm{OAP})=\frac{1}{2}a^3$$

となる点 P を通るときであるから

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot at=\frac{1}{2}a^3$$

$$\therefore \quad t=a$$

よって，P$(a,\ a^2)$ だから，求める方程式は

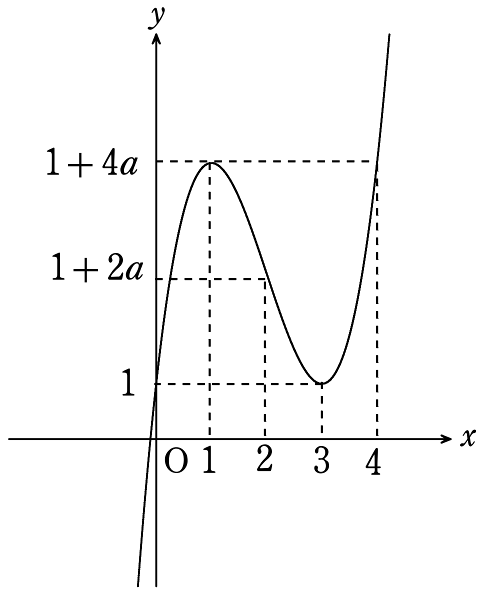
$$x=a$$ …[答]

[4]

1． $$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+1$$
について
$$f'(x)=3ax^2-12ax+9a \qquad \cdots①$$
$$=3a(x-1)(x-3)$$
だから，$a>0$より増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

これと
$$f(1)=4a+1 \text{（極大値）}$$
$$f(3)=1 \text{（極小値）}$$
より，そのグラフは




2．①より
$$f'(t)=3a(t^2-4t+3)$$
一方，題意より直線 AB の傾きは
$$\frac{f(t)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{at^3-6at^2+9at+16a}{5}$$
$$=\frac{a}{5}(t^3-6t^2+9t+16)$$
だから，点 C における曲線 $y=f(x)$ の接線と線分 AB とが平行になる

条件は

$$3a(t^2-4t+3)=\frac{a}{5}(t^3-6t^2+9t+16) \qquad \cdots(*)$$

$a>0$だから，これは

$$15(t^2-4t+3)=t^3-6t^2+9t+16$$

$$\Leftrightarrow \quad t^3-21t^2+69t-29=0 \qquad \cdots②$$

が成り立つことである。②の左辺を $g(t)$ とおくと

$$g'(t)=3t^2-42t+69$$
$$=3(t^2-14t+23)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} g'(-1)=3(15+23)>0 \\ g'(3)=-30<0 \end{cases}$$

よって　$\alpha=7-\sqrt{26}$　$(\alpha^2=14\alpha-23)$

として，$g(t)$ の増減は $-1<t<3$ において

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | |

となる。これと

$$\begin{cases} g(-1)=-1-21-69-29<0 \\ g(3)=27-189+207-29>0 \end{cases}$$

より　$\begin{cases} -1<c<\alpha \\ g(c)=0 \end{cases}$

となる実数 $c$ が存在して

$$\begin{cases} -1<t<c \text{ のとき} & g(t)<0 \\ c<t<3 \text{ のとき} & g(t)>0 \end{cases}$$

であるから，$(*)$が成り立つような実数 $t$ は $-1<t<3$ において 1 つだけ存在する。

よって，題意は示された。　[終]

高松高等予備校

[5]

1．題意より

$$\mathrm{OP}=|x|,\ \mathrm{PA}=|x-a|>0$$

だから

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}=\frac{|x|}{|x-a|}\quad (x \fallingdotseq a)$$ …[答]

2．
$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}=\frac{1}{2}$$

より

$$\frac{|x|}{|x-a|}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2|x|=|x-a|$$

$$\Leftrightarrow\quad x-a=\pm 2x$$

よって

$$x=-a,\ \frac{a}{3}$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{3},\ 0\right)\quad \text{または}\quad \mathrm{P}(-a,\ 0)$$ …[答]

3．
$$f(x)=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}=\frac{|x|}{|x-a|}$$

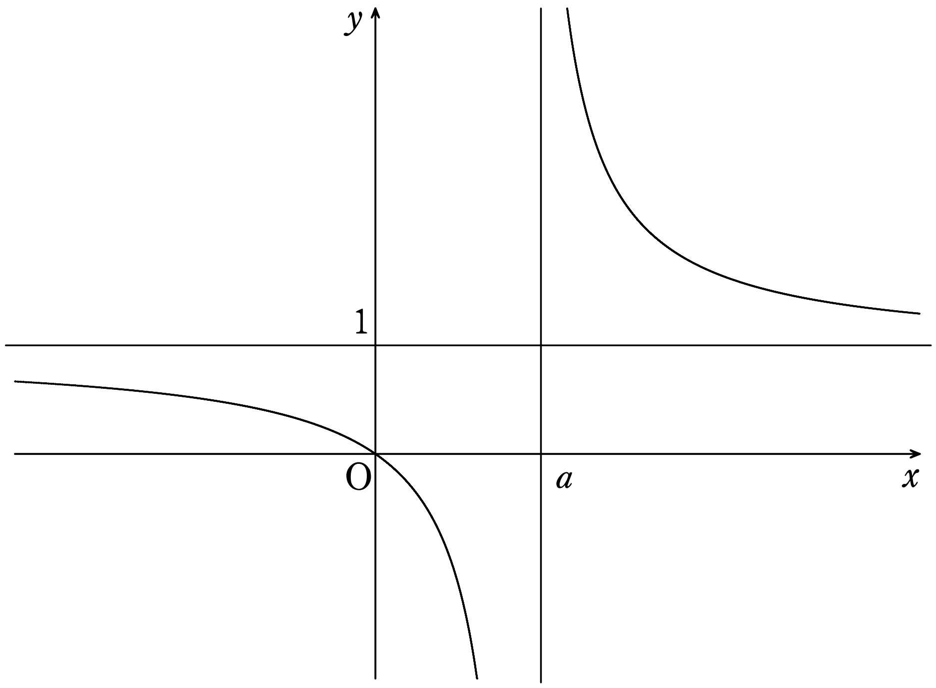
$x \fallingdotseq a$ のとき

$$g(x)=\frac{x}{x-a}$$

とおくと

$$\begin{cases} g(x)=1+\dfrac{a}{x-a} \\ f(x)=|g(x)| \end{cases}$$

であり，$y=g(x)$ のグラフは




のようだから，求める概形は