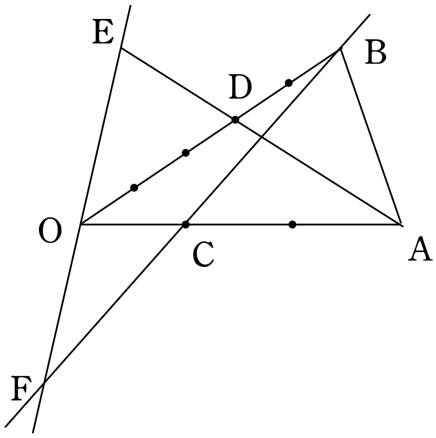
[1]



1. 題意より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\vec{a}+\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

…[答]

2. $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ であるから，題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=(1-t)\vec{b}+t\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

なる実数 t が存在し，また1．とから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\frac{2s}{3}\vec{a}+s\vec{b}$$

なる実数 s が存在する。これと$\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立より

$$\begin{cases}\dfrac{t}{3}=-\dfrac{2s}{3}\\ 1-t=s\end{cases}$$

$\therefore\quad (s,\ t)=(-1,\ 2)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$ …[答]

３．２．の考察から

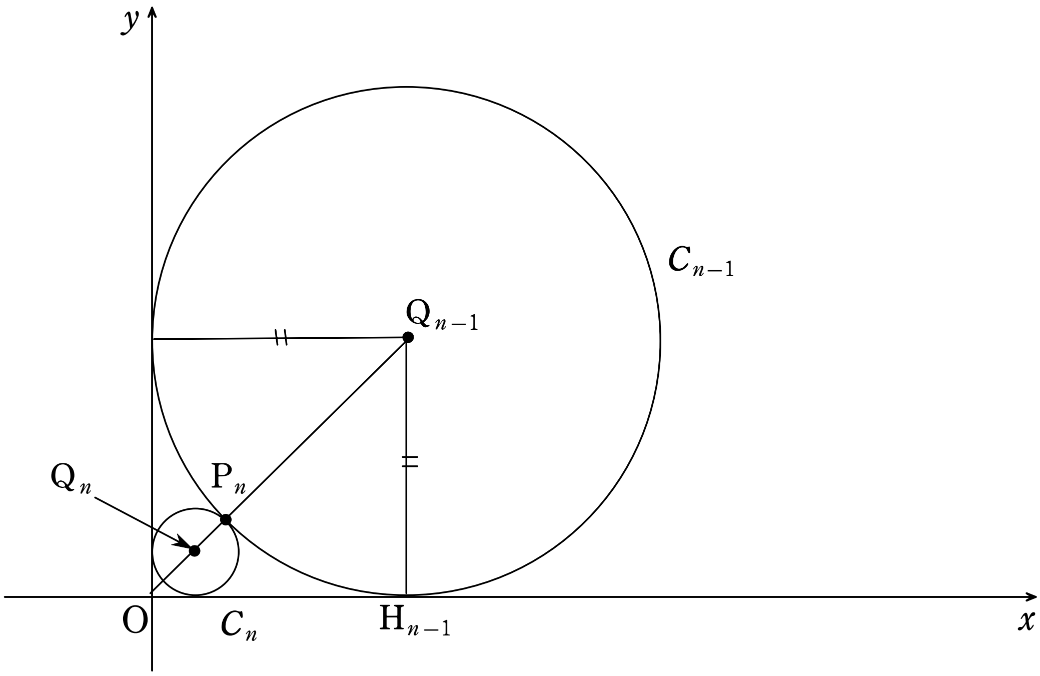
$$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

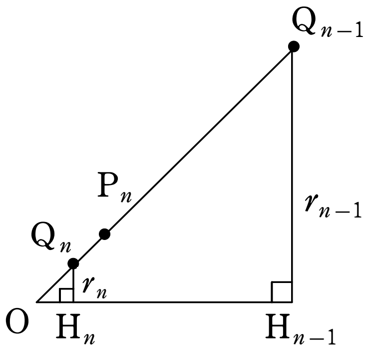
だから　　BF : FC＝2 : 1　　（外分）

よって　　FC : CB＝1 : 1　　…[答]

高松高等予備校

[2]





円 C_n の中心を Q_n とし，Q_n から x 軸に下ろした垂線の足を H_n とする。
$\triangle\ \mathrm{OH}_n\mathrm{Q}_n$ は直角二等辺三角形である。

$$\mathrm{OQ}_n=\sqrt{2}\,r_n$$

$$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n=r_n$$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n-1}=r_{n-1}$$

$$\mathrm{OQ}_{n-1}=\sqrt{2}\,r_{n-1}$$

となる。

1． $\mathrm{OP}_n=\mathrm{OQ}_n+\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n$

$=(\sqrt{2}+1)r_n$ …[答]

2．　$OQ_{n-1}=OP_n+P_nQ_{n-1}$

より

$$\sqrt{2}\,r_{n-1}=(\sqrt{2}+1)r_n+r_{n-1}$$
$$(\sqrt{2}-1)r_{n-1}=(\sqrt{2}+1)r_n+r_{n-1}$$
$$\therefore\quad r_n=(\sqrt{2}-1)^2r_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

よって，数列 $\{r_n\}$ は等比数列である。　[終]

3．2．より，数列 $\{r_n\}$ は公比 $(\sqrt{2}-1)^2$，初項 $r_1=1$ の等比数列だから

$$\begin{aligned}r_n&=\{(\sqrt{2}-1)^2\}^{n-1}r_1\\&=(\sqrt{2}-1)^{2(n-1)}\end{aligned}$$

だから

$$r_6=(\sqrt{2}-1)^{10}$$

C_6 の周上の点 X について三角不等式より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OX}|&=|\overrightarrow{OQ_6}+\overrightarrow{Q_6X}|\\&\leqq|\overrightarrow{OQ_6}|+r_6\\&=OP_6\\&=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{10}\\&=(\sqrt{2}-1)^9\\&=(3-2\sqrt{2})^4(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

ここで

$$0<3-2\sqrt{2}<\frac{1}{5}<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$$

だから

$$|\overrightarrow{OX}|<\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1250}<\frac{1}{1000}$$

よって，円 C_6 は，原点を中心とした半径 $\dfrac{1}{1000}$ の円の内部に含まれる。

[終]

高松高等予備校

[3]

1. $$C: y=x^2-x+1$$

について $y'=2x-1$

だから C 上の点 (t,t^2-t+1) における接線の方程式は

$$y=(2t-1)(x-t)+t^2-t+1$$

これが点 $(0,0)$ を通るから

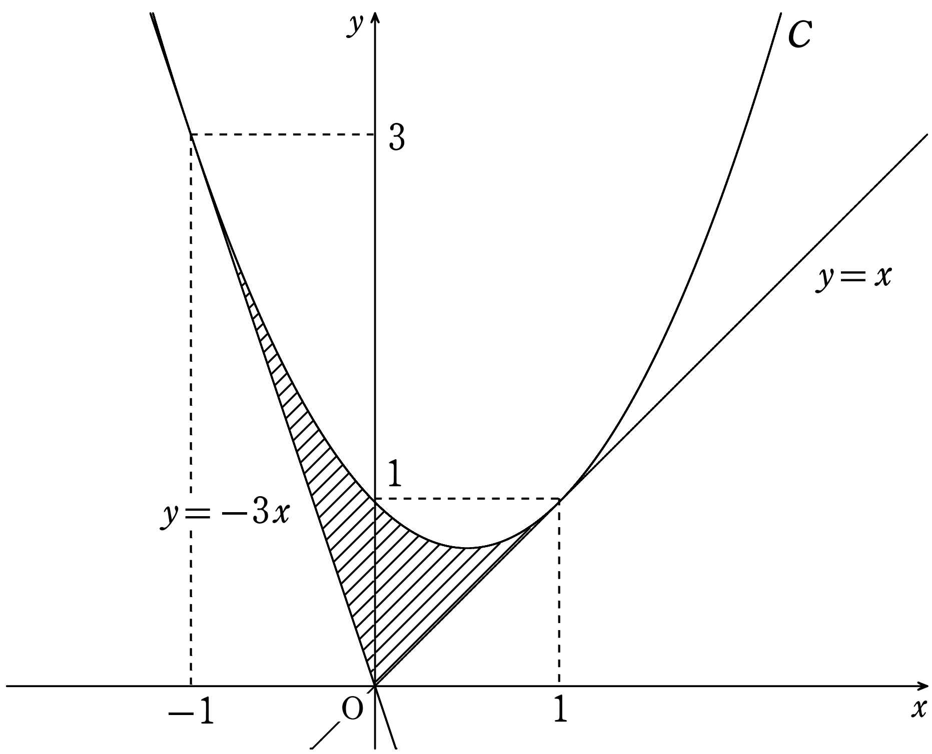
$$0=-t^2+1$$

$$\therefore \quad t=\pm 1$$

よって求める方程式は

$$y=-3x,\quad y=x$$ …[答]

2.



D は図の斜線部分

ただし，境界線を含む …[答]

3. 求める体積 V は

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(x^2-x+1)^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx-\pi\int_{0}^{1}x^2dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}(x^4+3x^2+1)dx-9\pi\int_{-1}^{0}x^2dx-\pi\int_{0}^{1}x^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}x^5+x^3+x\right]_0^1-9\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0-\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{5}+1+1\right)-10\pi\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{16}{15}\pi$$

…[答]

高松高等予備校

[4]

1．
$$B=6E-A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} 6A-A^2 &= A(6E-A) \\ &= AB \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= 9E \end{aligned}$$

だから

$$A^2-6A+9E=O$$

である。 [終]

2．i)
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

である。

ii)
$$A^k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3^k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と仮定すると①より

$$\begin{aligned} A^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 3^k A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

以上より，数学的帰納法によって，すべての自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。

次に題意より $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x_n = 3^{n-1} \\ y_n = -3^{n-1} \end{cases}$$ …[答]

３．１．より

$$(A-3E)^2 = O$$

であるから，二項定理より $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= \{3E + (A-3E)\}^n \\ &= 3^n E + 3^{n-1} n(A-3E) \\ &= n \cdot 3^{n-1} A + (-n+1) \cdot 3^n E \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときにも成り立つ。よって，自然数 n に対して

$$a_n A + b_n E = n \cdot 3^{n-1} A + (-n+1) \cdot 3^n E$$

が成り立つから各成分を比較すると

$$\begin{cases} a_n = n \cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1) \cdot 3^n \end{cases}$$ …[答]

高松高等予備校