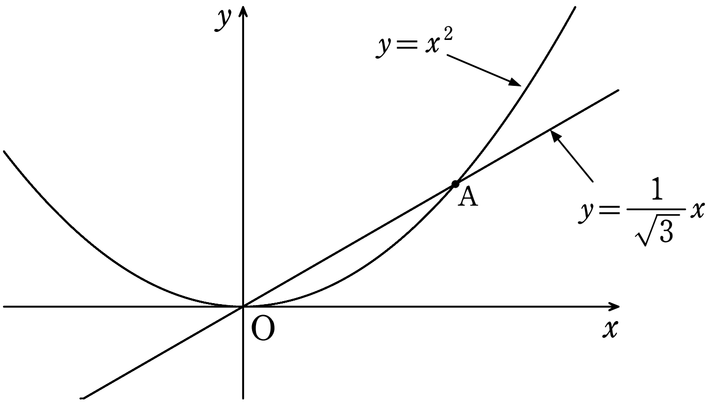
[1]

1．



原点 O を通りx軸とのなす角が 30° で傾きが正の直線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \cdots ①$$

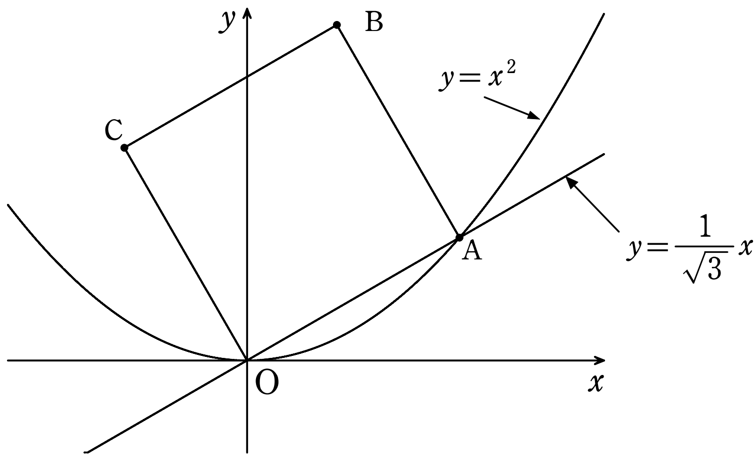
①と$y=x^2$ の O と異なる交点のx座標は

$$x^2=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$x \fallingdotseq 0$ から　$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3}\right)$ …[答]

2．



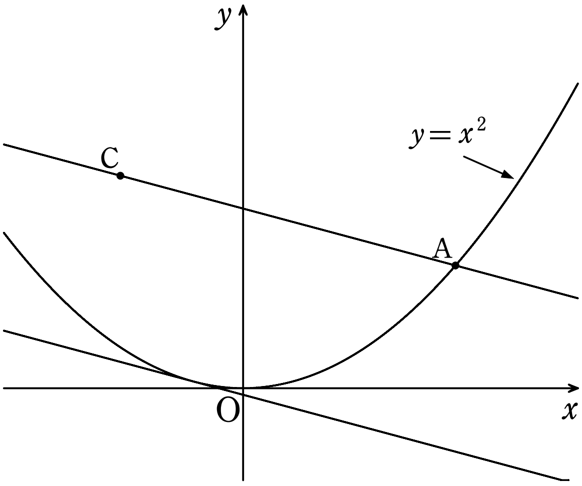
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3}\right)$ に垂直で同じ大きさのベクトルのうち，x 成分が負，y 成分が正であるベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3},\ \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\quad \mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3},\ \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right),\quad \mathrm{C}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ …[答]

３．



正方形 OABC で $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より直線 AC の傾きを調べると

$$\frac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{-(\sqrt{3}-1)^2}{2}=-2+\sqrt{3}$$

$y=x^2$ の接点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y&=2t(x-t)+t^2\\&=2tx-t^2\end{aligned}$$

であるから，$2t=-2+\sqrt{3}$ のとき

$$t^2=\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=(-2+\sqrt{3})x-\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

1．$a_k<100$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$) のとき，$a_1=2$ であることと

$$a_{k+1}=a_k+3\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

より

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3$$
$$=3n-1$$

$a_n<100$　より

$$3n-1<100$$
$$n<\frac{101}{3}$$

n は自然数であるから

$$1\leqq n\leqq 33$$

したがって，$1\leqq n\leqq 33$ のとき $a_{n+1}=a_n+3$ が成り立つことから

$1\leqq n\leqq 34$　のとき　$a_n=3n-1$

であり

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{33}<a_{34}$$

が成り立つ。

ここで　$a_{34}=101>100$ であるから

$$a_{35}=a_{34}-100=1$$

より　$a_{34}>a_{35}$

よって　$a_n>a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n は

$$n=34$$

$\therefore$　$m=34$ …[答]

$a_m=a_{34}=101$ …[答]

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{34}(3k-1)$$
$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-34$$
$$=1751$$ …[答]

２．題意より

n	1	2	3	$\cdots$	34
a_n	2	5	8	$\cdots$	101

n	35	36	37	$\cdots$	68
a_n	1	4	7	$\cdots$	100

n	69	70	71	$\cdots$	102	103	104	105
a_n	0	3	6	$\cdots$	99	102	2	5

よって

$$a_{105}=5$$ …[答]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{105} a_k &= (2+5+8+\cdots+101)\\ &\quad +(1+4+7+\cdots+100)\\ &\quad +(0+3+6+\cdots+102)\\ &\quad +2+5\\ &=\sum_{k=1}^{34}(3k-1)+\sum_{k=1}^{34}(3k-2)+\sum_{k=1}^{34}3k+7\\ &=\sum_{k=1}^{34}(9k-3)+7\\ &=9\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-3\cdot 34+7\\ &=5260\end{aligned}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．$P=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}-3$ とすると

$$P=\frac{6-x+4(x-3)-3(x-3)(6-x)}{(x-3)(6-x)}$$
$$=\frac{3(x^2-8x+16)}{(x-3)(6-x)}$$
$$=\frac{3(x-4)^2}{(x-3)(6-x)}$$

$3<x<6$ より $x-3>0$，$6-x>0$

x は実数より $(x-4)^2\geqq 0$ であるから

$$P\geqq 0$$

よって，$\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geqq 3$ （等号成立は，$x=4$ のときに限る）

[証明終]

2．$3<x<6$ のとき

(左辺)$=\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}>0$ より題意を満たす a の最大値は正。よって

$a>0$ で考えたのでよい。

与えられた不等式の両辺に，$(x-3)(6-x)>0$ をかけて

$$5(6-x)+4(x-3)\geqq a(x-3)(6-x)$$

よって

$$ax^2-(9a+1)x+18(a+1)\geqq 0$$

が $3<x<6$ でつねに成り立つような，正の数 a の最大値を求めれば

よい。

$f(x)=ax^2-(9a+1)x+18(a+1)$ とすると

$a>0$ より 軸 $x=\dfrac{9a+1}{2a}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}>\dfrac{9}{2}$

(i) $\dfrac{9a+1}{2a}\geqq 6$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき

$f(x)$ は $3<x<6$ で単調減少で，$f(6)=12\geqq 0$ であるから

$0<a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき $3<x<6$ でつねに $f(x)\geqq 0$ が成立。

(ii) $\dfrac{9}{2}<\dfrac{9a+1}{2a}<6$ すなわち $a>\dfrac{1}{3}$ のとき

最小値 $f\left(\dfrac{9a+1}{2a}\right) \geqq 0$ が成り立つことが必要十分。

$$f\left(\frac{9a+1}{2a}\right) = a\left(\frac{9a+1}{2a}\right)^2 - \frac{(9a+1)^2}{2a} + 18(a+1) \geqq 0$$

$$-\frac{(9a+1)^2}{4a} + 18(a+1) \geqq 0$$

$a>0$ より

$$-(9a+1)^2 + 72a(a+1) \geqq 0$$

$$9a^2 - 54a + 1 \leqq 0$$

$$\frac{9-4\sqrt{5}}{3} \leqq a \leqq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

$a > \dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{3} < a \leqq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

(i), (ii) より a の最大値は　$a = \dfrac{9+4\sqrt{5}}{3}$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1．$$y=x^2-2 \quad \cdots①$$
$$y=-ax^2+ax-1 \cdots②$$

①，② よりyを消去して

$$x^2-2=-ax^2+ax-1$$
$$(a+1)x^2-ax-1=0$$
$$(x-1)\{(a+1)x+1\}=0$$

$a>0$ より

$$x=1,\quad -\frac{1}{a+1}$$

$x=1$ のとき ① より

$$y=1-2=-1$$

$x=-\dfrac{1}{a+1}$ のとき ① より

$$y=\frac{1}{(a+1)^2}-2$$

よって，求める交点の座標は

$$(1,\quad -1),\ \left(-\frac{1}{a+1},\ \frac{1}{(a+1)^2}-2\right) \quad \cdots[答]$$

2．$a>0$ より，求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\{(-ax^2+ax-1)-(x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\left\{-(a+1)(x-1)\left(x+\frac{1}{a+1}\right)\right\}dx$$
$$=(a+1)\times\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^3$$
$$=\frac{(a+2)^3}{6(a+1)^2} \quad \cdots[答]$$

高松高等予備校