[1]

1． $$f(x)=x^4+x^3=x^3(x+1)$$

から

$$f'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$$

$$f''(x)=12x^2+6x=6x(2x+1)$$

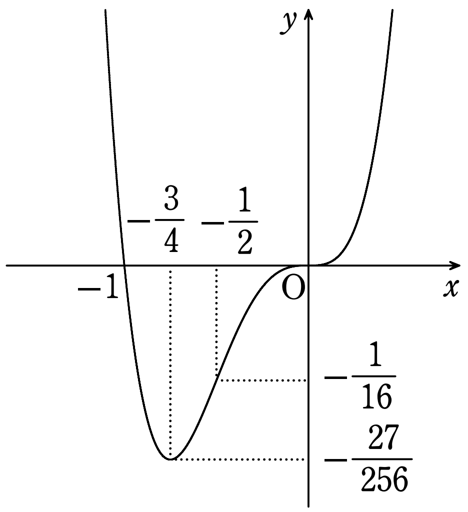
よって $f(x)$ の増減，凹凸は下の表のようになる

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{3}{4}$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 極小 | ↗ | 変曲点 | ↗ | 変曲点 | ↗ |

$$f(0)=0,\quad f(-1)=0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16},\quad f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{256},\quad f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

より，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる




…[答]

2．題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(t-1-t,\ f(t-1)-f(t))$$
$$=(-1,\ f(t-1)-f(t))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(t+1-t,\ f(t+1)-f(t))$$
$$=(1,\ f(t+1)-f(t))$$

なので

$$S(t)=\frac{1}{2}|f(t-1)-f(t)+f(t+1)-f(t)|$$

$$=\frac{1}{2}|2f(t)-f(t+1)-f(t-1)|$$

ここで

$$f(t+1)=(t+1)^4+(t+1)^3$$
$$f(t-1)=(t-1)^4+(t-1)^3$$

より辺々加えると

$$f(t+1)+f(t-1)=2t^4+12t^2+2+(2t^3+6t)$$
$$=2t^4+2t^3+12t^2+6t+2$$

$$\therefore\quad S(t)=\frac{1}{2}\left|(2t^4+2t^3)-(2t^4+2t^3+12t^2+6t+2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}|12t^2+6t+2|$$

$$=|6t^2+3t+1|$$

ここで

$6t^2+3t+1=6\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{8}>0$ より

$S(t)=6t^2+3t+1$ …[答]

３．２． の結果から

$S(t)=6\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{8}$ だから

$t=-\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{5}{8}$ …[答]

をとる。

高松高等予備校

[2]

1．命題

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\cdots(*)$$

を数学的帰納法で示す。

[1]　与式から$(*)$は$n=1$のとき成り立つ。

[2]　$n=k$のとき$(*)$が成り立つと仮定すると

加法定理より

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=A^kA\\ &=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta)\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$(*)$は$n=k+1$のときにも成り立つ。

[1]，[2]より$(*)$はすべての自然数$n$について成り立つ。

よって

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\qquad\cdots[答]$$

2．$$S_n=E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}\quad\cdots①$$

の両辺に左から$A$をかけると

$$AS_n=A+A^2+A^3+\cdots+A^n\quad\cdots②$$

①−② より

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}\\ - & AS_n= & \phantom{E+}A+A^2+\cdots+A^{n-1}+A^n\\ \hline & (E-A)S_n= & E\qquad\qquad\qquad\qquad -A^n\end{array}\quad\cdots③$$

ここで

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

であるから

$$\Delta(E-A)=(1-\cos\theta)^2-\sin\theta(-\sin\theta)$$
$$=1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$
$$=2(1-\cos\theta)$$

ここで，$0<\theta\leqq\pi$ より　$-1\leqq\cos\theta<1$ なので

$$\Delta(E-A)>0$$

したがって，$E-A$ は逆行列をもつから

③の両辺に左から $(E-A)^{-1}$ をかけると

$$S_n=(E-A)^{-1}(E-A^n)$$
$$=(A-E)^{-1}(A^n-E)$$

これと

$$S_n=P(A^n-E)$$

とから

$$P(A^n-E)=(A-E)^{-1}(A^n-E)$$

ここで $\Delta(A^n-E)=2(1-\cos n\theta)$

これと $0<\theta\leqq\pi$ から考えて

[ｉ]　$\theta=\dfrac{2m\pi}{n}$ ($m$ は $1\leqq m\leqq\dfrac{n}{2}$ なる整数)

のとき　$S_n=A^n-E=O$　$\left(\text{ただし，}O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$

となるから，$P$ は任意。

[ⅱ]　[ｉ]以外のとき

$$\Delta(A^n-E)=2(1-\cos n\theta)>0$$

なので $(A^n-E)^{-1}$ が存在するから

$$P=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ -\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\theta=\dfrac{2m\pi}{n}\ (m \text{ は } 1\leqq m\leqq \dfrac{n}{2} \text{ なる整数})\text{のとき} \\
\qquad\qquad P \text{ は任意の } 2\times 2 \text{ 行列} \\
\theta\fallingdotseq\dfrac{2m\pi}{n}\ (m \text{ は } 1\leqq m\leqq \dfrac{n}{2} \text{ なる整数})\text{のとき} \\
\qquad\qquad P=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ -\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

…[答]

3．1． 2． より　$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ のとき

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

だから

$$S_n=(A-E)^{-1}(A^n-E)=O$$

よって両辺の 1－1 成分を考えて

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta=0$$

$$\therefore\quad 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta+\cos n\theta=\cos n\theta$$

$$=\cos 2\pi$$

$$=1$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1．求める番号 $a_n$ は

$$a_n=(2n+1)^2 \quad \cdots(*)$$

と推測される。これを数学的帰納法で示す。

[1]　(1，−1) の番号は 9 だから (*) は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると題意より

$$a_{k+1}-a_k$$

は各辺が両軸に平行で，頂点が格子点であって 1 辺が $(2k+2)$ の正方形の周上の格子点の数だから

$$a_{k+1}-a_k=8k+8$$

$$\therefore \quad a_{k+1}=(2k+1)^2+8k+8$$
$$=4k^2+12k+9$$
$$=(2k+3)^2$$

よって (*) は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2] より (*) はすべての自然数に対して成り立つ。したがって

$$a_n=(2n+1)^2 \qquad \cdots[答]$$

2．求める番号 $b_n$ は 1． の考察より

$$b_n=a_n+2n+2$$

だから 1． の結果より

$$b_n=(2n+1)^2+2n+2$$
$$=4n^2+6n+3 \qquad \cdots[答]$$

3．1．，2． の結果より

$$a_{15}=31^2=961<b_{15}=993<1000<1009$$

なので

$$1000-993=7$$

よって番号 1000 がふられる格子点は (16，16) から −7 だけ $x$ 軸方向に行ったところだから求める座標は

$$(9,\ 16) \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校

[4]

1. $$y=\frac{\log x}{x}=f(x)$$

について

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$とすると　$x=e$

$f''(x)=0$とすると　$x=e^{\frac{3}{2}}$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減およびグラフの凹凸は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 極大 | ↘ | 変曲点 | ↘ |

$$f(e)=\frac{1}{e},\quad f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

いま

$$g(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

とおくと

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\log x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

から $x\geqq e^2$ のとき $g(x)$ の増減表は

| $x$ | $e^2$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | |

よって $g(x)>0$ で $g(x)$ は単調減少ゆえ

$$0<g(x)\leqq\frac{1}{e}$$

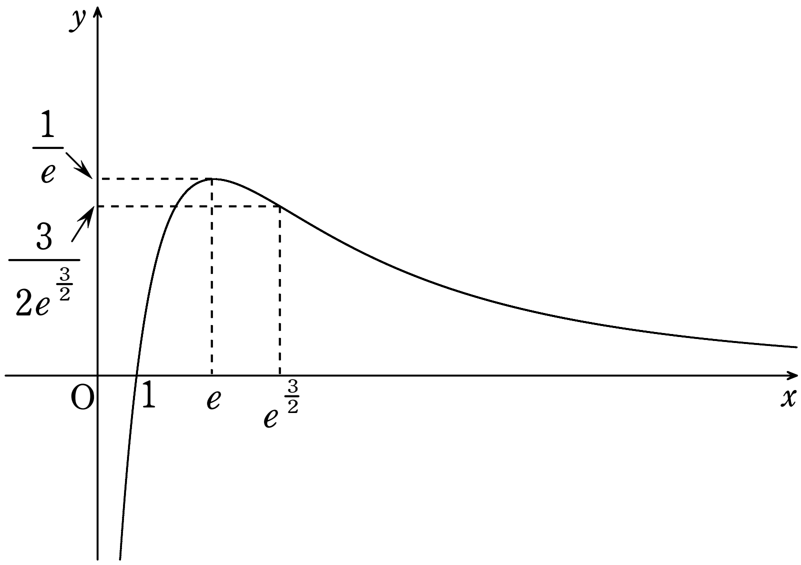
これより

$$0<f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x}}\leqq\frac{1}{e\sqrt{x}}$$

であり $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e\sqrt{x}}=0$ だから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{x}}=0$$

以上より，曲線 $C$ の概形は次のようになる。




２．１．の考察より求める方程式は

$$y=f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\left(x-e^{\frac{3}{2}}\right)+f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2e^3}x+\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2e^3}x+2e^{-\frac{3}{2}}=-\frac{e^{-3}}{2}x+2e^{-\frac{3}{2}}$$

よって $\ell$ の方程式は

$$y=-\frac{e^{-3}}{2}x+2e^{-\frac{3}{2}}$$ …[答]

3. $$h(x)=f(x)+\frac{e^{-3}}{2}x-2e^{-\frac{3}{2}}$$

とおくと

$$h'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}+\frac{1}{2}e^{-3}$$

$$h''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

$h'(x)$ の増減は

| $x$ | $+0$ | $\cdots$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h'(x)$ | | ↘ | 極小 | ↗ | |

これと $h'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=0$ より $h'(x)\geqq 0$

（等号は$x=e^{\frac{3}{2}}$のときのみ成り立つ）

よって　$h(x)$ は単調増加であって

$$h\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=0$$

より　方程式 $h(x)=0$

すなわち $f(x)=-\dfrac{e^{-3}}{2}x+2e^{-\frac{3}{2}}$

は $x=e^{\frac{3}{2}}$ 以外に実数解をもたない。

よって，$\ell$ と $C$ は，P 以外に共有点をもたない。

〔終〕

高松高等予備校