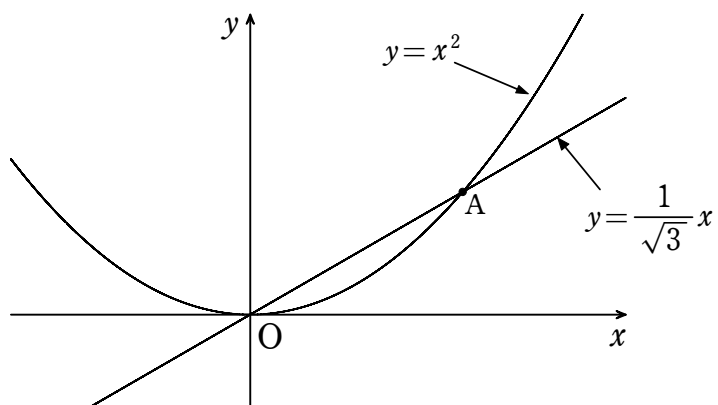


[1]

1.



原点 O を通り x 軸とのなす角が 30° で傾きが正の直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \dots \textcircled{1}$$

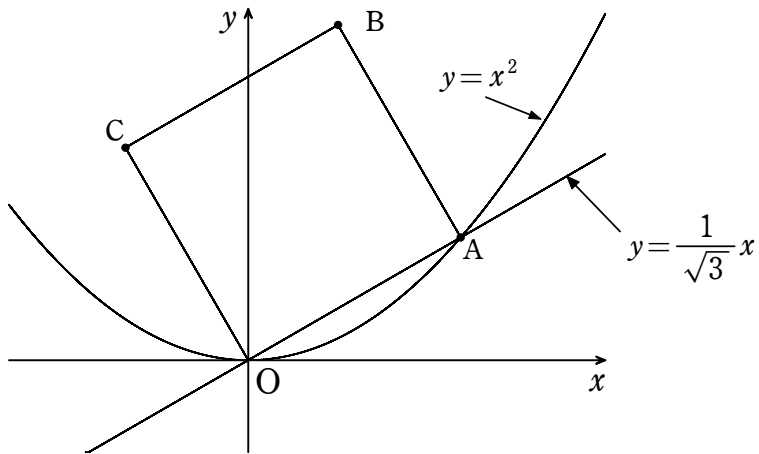
①と $y = x^2$ の O と異なる交点の x 座標は

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$x \neq 0 \text{ から } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{点 } A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right) \quad \dots[\text{答}]$$

2.



$\vec{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} \right)$ に垂直で同じ大きさのベクトルのうち、 x 成分が負、

y 成分が正であるベクトルが \vec{OC} であるから

$$\vec{OC} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$$

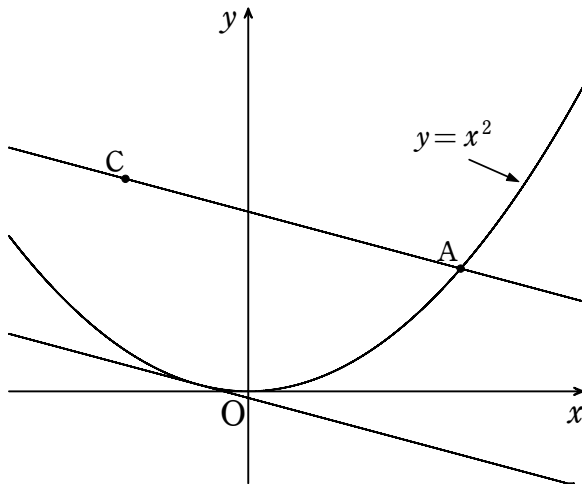
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3} \right)$$

$$\therefore B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right), \quad C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

…[答]

3.



正方形 $OABC$ で $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$ より直線 AC の傾きを調べると

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{-(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = -2 + \sqrt{3}$$

$y = x^2$ の接点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

であるから、 $2t = -2 + \sqrt{3}$ のとき

$$t^2 = \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$$

よって、求める接線の方程式は

$$y = (-2 + \sqrt{3})x - \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$$

…[答]

高松高等予備校

[2]

1. $a_k < 100$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) のとき, $a_1=2$ であることと

$$a_{k+1} = a_k + 3 \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

より

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

$a_n < 100$ より

$$3n - 1 < 100$$

$$n < \frac{101}{3}$$

n は自然数であるから

$$1 \leq n \leq 33$$

したがって, $1 \leq n \leq 33$ のとき $a_{n+1} = a_n + 3$ が成り立つことから

$$1 \leq n \leq 34 \quad \text{のとき} \quad a_n = 3n - 1$$

であり

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{33} < a_{34}$$

が成り立つ。

ここで $a_{34} = 101 > 100$ であるから

$$a_{35} = a_{34} - 100 = 1$$

より $a_{34} > a_{35}$

よって $a_n > a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n は

$$n = 34$$

$$\therefore m = 34$$

…[答]

$$a_m = a_{34} = 101$$

…[答]

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^{34} (3k - 1)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 35 - 34$$

$$= 1751$$

…[答]

2. 題意より

n	1	2	3	...	34
a_n	2	5	8	...	101

n	35	36	37	...	68
a_n	1	4	7	...	100

n	69	70	71	...	102	103	104	105
a_n	0	3	6	...	99	102	2	5

よって

$$a_{105} = 5$$

…[答]

$$\sum_{k=1}^{105} a_k = (2 + 5 + 8 + \dots + 101)$$

$$+ (1 + 4 + 7 + \dots + 100)$$

$$+ (0 + 3 + 6 + \dots + 102)$$

$$+ 2 + 5$$

$$= \sum_{k=1}^{34} (3k - 1) + \sum_{k=1}^{34} (3k - 2) + \sum_{k=1}^{34} 3k + 7$$

$$= \sum_{k=1}^{34} (9k - 3) + 7$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 35 - 3 \cdot 34 + 7$$

$$= 5260$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1. $P = \frac{1}{x-3} + \frac{4}{6-x} - 3$ とすると

$$\begin{aligned} P &= \frac{6-x+4(x-3)-3(x-3)(6-x)}{(x-3)(6-x)} \\ &= \frac{3(x^2-8x+16)}{(x-3)(6-x)} \\ &= \frac{3(x-4)^2}{(x-3)(6-x)} \end{aligned}$$

$3 < x < 6$ より $x-3 > 0$, $6-x > 0$

x は実数より $(x-4)^2 \geq 0$ であるから

$$P \geq 0$$

よって, $\frac{1}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq 3$ (等号成立は, $x=4$ のときに限る)

[証明終]

2. $3 < x < 6$ のとき

(左辺) $= \frac{5}{x-3} + \frac{4}{6-x} > 0$ より題意を満たす a の最大値は正。よって

$a > 0$ で考えたのでよい。

与えられた不等式の両辺に, $(x-3)(6-x) > 0$ をかけて

$$5(6-x) + 4(x-3) \geq a(x-3)(6-x)$$

よって

$$ax^2 - (9a+1)x + 18(a+1) \geq 0$$

が $3 < x < 6$ でつねに成り立つような, 正の数 a の最大値を求めればよい。

$f(x) = ax^2 - (9a+1)x + 18(a+1)$ とすると

$a > 0$ より 軸 $x = \frac{9a+1}{2a} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2a} > \frac{9}{2}$

(i) $\frac{9a+1}{2a} \geq 6$ すなわち $0 < a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$f(x)$ は $3 < x < 6$ で単調減少で, $f(6) = 12 \geq 0$ であるから

$0 < a \leq \frac{1}{3}$ のとき $3 < x < 6$ でつねに $f(x) \geq 0$ が成立。

(ii) $\frac{9}{2} < \frac{9a+1}{2a} < 6$ すなわち $a > \frac{1}{3}$ のとき

最小値 $f\left(\frac{9a+1}{2a}\right) \geq 0$ が成り立つことが必要十分。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9a+1}{2a}\right) &= a\left(\frac{9a+1}{2a}\right)^2 - \frac{(9a+1)^2}{2a} + 18(a+1) \geq 0 \\ &\quad - \frac{(9a+1)^2}{4a} + 18(a+1) \geq 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$-(9a+1)^2 + 72a(a+1) \geq 0$$

$$9a^2 - 54a + 1 \leq 0$$

$$\frac{9-4\sqrt{5}}{3} \leq a \leq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

$a > \frac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

(i), (ii) より a の最大値は $a = \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1. $y = x^2 - 2 \dots \textcircled{1}$
 $y = -ax^2 + ax - 1 \dots \textcircled{2}$

①, ② より y を消去して

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= -ax^2 + ax - 1 \\(a+1)x^2 - ax - 1 &= 0 \\(x-1)\{(a+1)x+1\} &= 0\end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$x = 1, \quad -\frac{1}{a+1}$$

$x = 1$ のとき ① より

$$y = 1 - 2 = -1$$

$x = -\frac{1}{a+1}$ のとき ① より

$$y = \frac{1}{(a+1)^2} - 2$$

よって、求める交点の座標は

$$(1, -1), \left(-\frac{1}{a+1}, \frac{1}{(a+1)^2} - 2\right) \quad \dots[\text{答}]$$

2. $a > 0$ より、求める面積は

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{1}{a+1}}^1 \{(-ax^2 + ax - 1) - (x^2 - 2)\} dx \\&= \int_{-\frac{1}{a+1}}^1 \left\{ -(a+1)(x-1) \left(x + \frac{1}{a+1} \right) \right\} dx \\&= (a+1) \times \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{a+1} \right)^3 \\&= \frac{(a+2)^3}{6(a+1)^2} \quad \dots[\text{答}]\end{aligned}$$

[5]

1. $y = x^3 e^{-x}$

について

$$y' = x^2(3-x)e^{-x}$$

...①

$y' = 0$ とすると $x = 0, 3$ だから増減表は

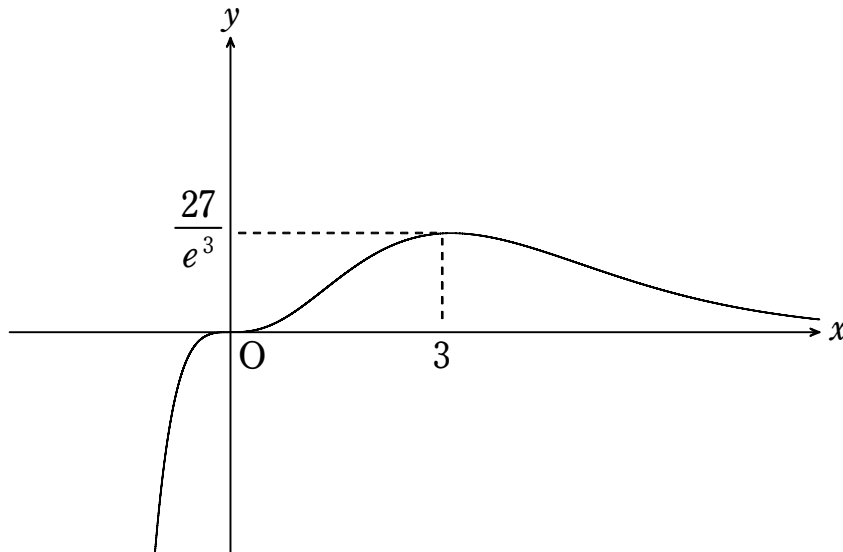
x	...	0	...	3	...
y'	+	0	+	0	-
y	↗	0	↗	$\frac{27}{e^3}$	↘

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = 0$$

より $y = 0$ (x 軸) は漸近線で

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$$

から C の概形は次のようになる。



2. 点 P の座標を $(t, t^3 e^{-t})$ とする。点 P における接線の方程式は①より

$$y - t^3 e^{-t} = t^2(3-t)e^{-t}(x-t)$$

これが原点を通るから

$$t^3 e^{-t} = t^3(3-t)e^{-t}$$

$$t^3(1-3+t)e^{-t} = 0$$

$$t^3(t-2)e^{-t} = 0$$

$e^{-t} \neq 0$ だから

$$t=0, 2$$

$t=0$ のとき傾きは 0 となり不適。

$t=2$ のとき傾きは $4e^{-2} > 0$ となり適する。

よって ℓ の方程式は

$$y=4e^{-2}x$$

…[答]

および P の座標は

$$\left(2, \frac{8}{e^2}\right)$$

…[答]

高松高等予備校