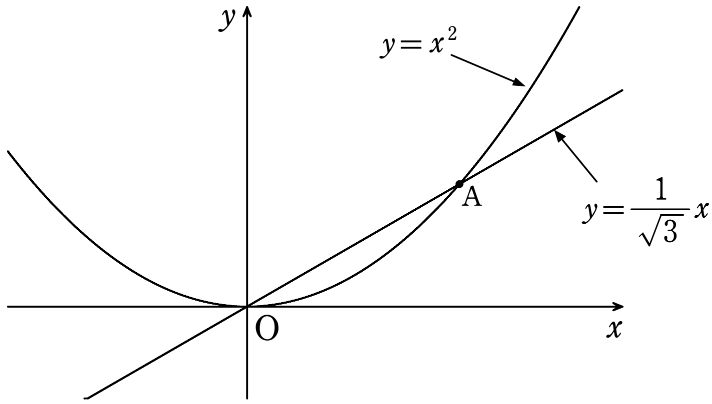
[1]

1．



原点 O を通り x 軸とのなす角が 30° で傾きが正の直線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \qquad \cdots①$$

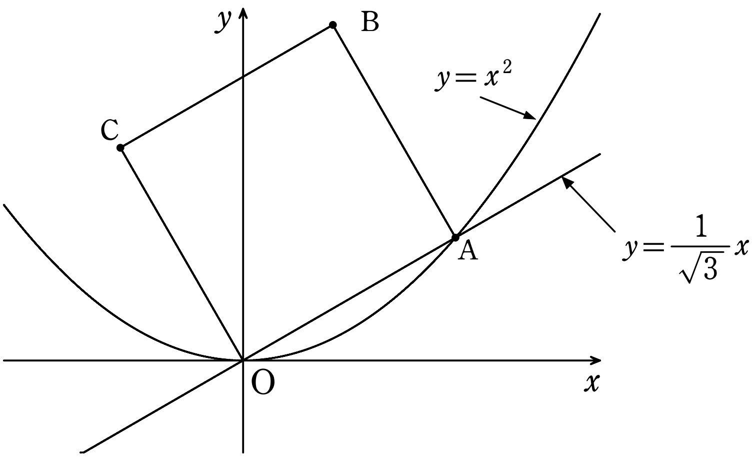
①と $y=x^2$ の O と異なる交点の x 座標は

$$x^2=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$x \fallingdotseq 0$ から　$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3}\right)$ …[答]

2．



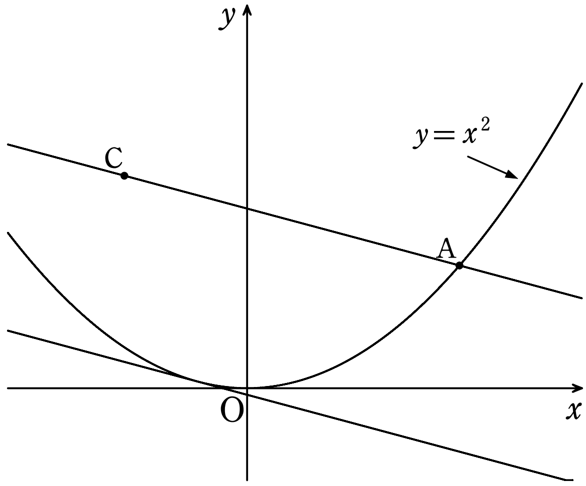
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3}\right)$ に垂直で同じ大きさのベクトルのうち，x 成分が負，y 成分が正であるベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3},\ \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\quad \mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3},\ \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right),\quad \mathrm{C}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ …[答]

３．



正方形 OABC で $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より直線 AC の傾きを調べると

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{-(\sqrt{3}-1)^2}{2}=-2+\sqrt{3}$$

$y=x^2$ の接点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y&=2t(x-t)+t^2\\&=2tx-t^2\end{aligned}$$

であるから，$2t=-2+\sqrt{3}$ のとき

$$t^2=\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=(-2+\sqrt{3})x-\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

1．$a_k<100$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$ のとき，$a_1=2$ であることと

$$a_{k+1}=a_k+3 \ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$$

より

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3$$
$$=3n-1$$

$a_n<100$　より

$$3n-1<100$$
$$n<\frac{101}{3}$$

n は自然数であるから

$$1\leqq n\leqq 33$$

したがって，$1\leqq n\leqq 33$ のとき $a_{n+1}=a_n+3$ が成り立つことから

$$1\leqq n\leqq 34 \quad \text{のとき} \quad a_n=3n-1$$

であり

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{33}<a_{34}$$

が成り立つ。

ここで　$a_{34}=101>100$ であるから

$$a_{35}=a_{34}-100=1$$

より　$a_{34}>a_{35}$

よって　$a_n>a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n は

$$n=34$$

$\therefore$　$m=34$ …[答]

$a_m=a_{34}=101$ …[答]

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{34}(3k-1)$$
$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-34$$
$$=1751$$ …[答]

2．題意より

n	1	2	3	$\cdots$	34
a_n	2	5	8	$\cdots$	101

n	35	36	37	$\cdots$	68
a_n	1	4	7	$\cdots$	100

n	69	70	71	$\cdots$	102	103	104	105
a_n	0	3	6	$\cdots$	99	102	2	5

よって

$a_{105}=5$ …[答]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{105} a_k &= (2+5+8+\cdots+101)\\ &\quad +(1+4+7+\cdots+100)\\ &\quad +(0+3+6+\cdots+102)\\ &\quad +2+5\\ &=\sum_{k=1}^{34}(3k-1)+\sum_{k=1}^{34}(3k-2)+\sum_{k=1}^{34}3k+7\\ &=\sum_{k=1}^{34}(9k-3)+7\\ &=9\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-3\cdot 34+7\\ &=5260\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1．
$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

について

$$\varDelta=1\cdot(-1)-1\cdot2=-3$$

だから

$$P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \qquad \cdots[答]$$

2．
$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots[答]$$

3．
$$B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}4^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

から

$$B^n=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots(*)$$

であると推測される。$(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき　２．より $(*)$ が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のときを考えると

$$B^{k+1}=B^kB$$
$$=\begin{pmatrix}4^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4^{k+1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときにも (*) は成り立つ。

[1]，[2] により，(*) はすべての自然数 n に対して成り立つ。よって

$$B^n=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ …[答]

4． $$(P^{-1}AP)^n=B^n$$

より

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots(P^{-1}AP)=B^n$$

だから

$$P^{-1}A^nP=B^n$$

この式に左から P，右から P^{-1} をかけて

$$A^n=PB^nP^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n & 1\\ 2\cdot4^n & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2 & 4^n-1\\ 2\cdot4^n-2 & 2\cdot4^n+1\end{pmatrix}$$ …[答]

[4]

1. 放物線 $C: x=y^2$ …①

と円 $C_1: (x-p_1)^2+y^2=1$ …②

が接するので，①および②から y を消去した方程式

$$(x-p_1)^2+x=1$$

すなわち

$$x^2-(2p_1-1)x+p_1{}^2-1=0 \quad \cdots③$$

の判別式を D_1 とすると

$$D_1=0$$

$$(2p_1-1)^2-4(p_1{}^2-1)=0$$

$$-4p_1+5=0$$

$$\therefore \quad p_1=\frac{5}{4}$$

よって，③より接点 Q_1 の x 座標 $q_1{}^2$ は

$$q_1{}^2=\frac{2p_1-1}{2}=\frac{2\cdot\frac{5}{4}-1}{2}=\frac{3}{4}$$

$q_1>0$ より

$$q_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，放物線 C と円 $C_2: (x-p_2)^2+y^2=r_2{}^2$ …④

が接するので，①および④から y を消去した方程式

$$(x-p_2)^2+x=r_2{}^2$$

すなわち

$$x^2-(2p_2-1)x+p_2{}^2-r_2{}^2=0 \quad \cdots⑤$$

の判別式を D_2 とすると

$$D_2=0$$

$$(2p_2-1)^2-4(p_2{}^2-r_2{}^2)=0$$

$$-4p_2+4r_2{}^2+1=0$$

$$\therefore \quad p_2=r_2{}^2+\frac{1}{4} \quad \cdots⑥$$

ここで，2 円 C_1，C_2 は点 T で外接しているから，$p_1<p_2$ より

$$p_2 - p_1 = 1 + r_2$$

$$\therefore \quad p_2 = p_1 + 1 + r_2 = \frac{9}{4} + r_2 \qquad \cdots ⑦$$

⑥，⑦より

$$\frac{9}{4} + r_2 = {r_2}^2 + \frac{1}{4}$$

$${r_2}^2 - r_2 - 2 = 0$$

$$(r_2 - 2)(r_2 + 1) = 0$$

$r_2 > 1$ より

$$r_2 = 2$$

⑦に代入して

$$p_2 = \frac{17}{4}$$

よって，⑤より接点 Q_2 の x 座標 ${q_2}^2$ は

$${q_2}^2 = \frac{2p_2 - 1}{2} = \frac{2 \cdot \frac{17}{4} - 1}{2} = \frac{15}{4}$$

$q_2 > 0$ より

$$q_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

以上より

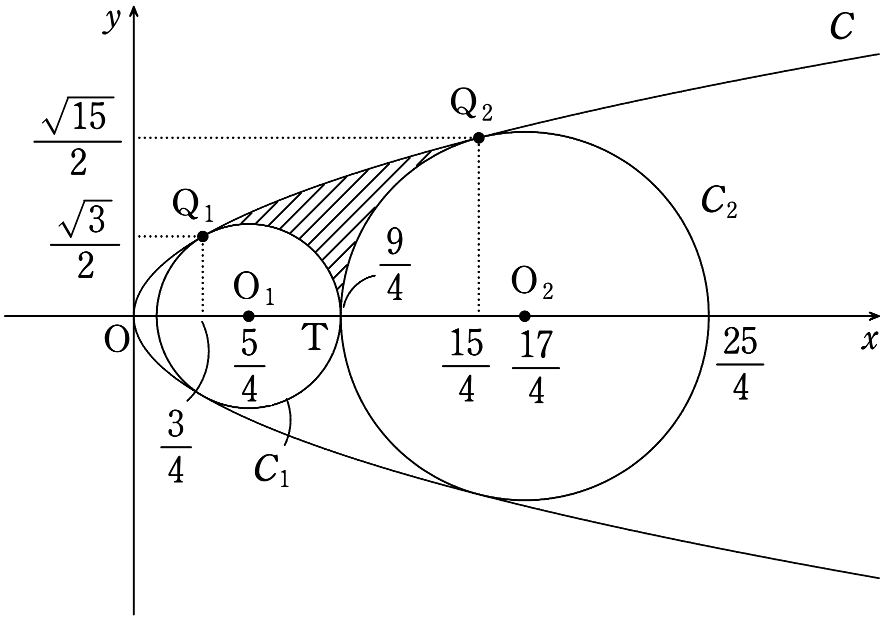
$$p_1 = \frac{5}{4}, \quad p_2 = \frac{17}{4}, \quad q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad r_2 = 2 \qquad \cdots [答]$$

２．１．の結果から

$$C_1 : \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : \left(x - \frac{17}{4}\right)^2 + y^2 = 4,$$

$$\mathrm{Q}_1\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{Q}_2\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \mathrm{T}\left(\frac{9}{4}, 0\right)$$

であるから，C，C_1，C_2 の概形を図示すると，次のようになる。



…[答]

また，D は図の斜線部分であり，境界線を含む。

3．　円 $C_1 : \left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2$

円 $C_2 : \left(x-\dfrac{17}{4}\right)^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=4-\left(x-\dfrac{17}{4}\right)^2$

より，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{15}{4}} x\,dx-\pi\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{9}{4}}\left\{1-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\right\}dx-\pi\int_{\frac{9}{4}}^{\frac{15}{4}}\left\{4-\left(x-\frac{17}{4}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{15}{4}}-\left[x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{9}{4}}-\left[4x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{17}{4}\right)^3\right]_{\frac{9}{4}}^{\frac{15}{4}}\right\}$$

$$=\frac{9}{4}\pi$$

…[答]