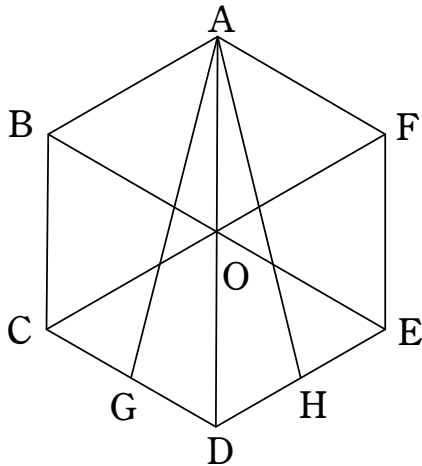


[1]

1.



正六角形 $ABCDEF$ の外接円の中心を O とする。
 四角形 $ABOF$, $ABCO$, $AOEF$ は平行四辺形だから

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

…[答]

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

…[答]

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

…[答]

2. 正六角形は対角線 AD に関して対称だから $\triangle AGD$ の面積が正六角形 $ABCDEF$ の面積の $\frac{1}{6}$ であればよい。

よって $(\triangle AGD) = (\triangle OCD)$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} DA \cdot DG \sin 60^\circ = \frac{1}{2} DO \cdot DC \sin 60^\circ$$

$AD = 2OD$ だから $DG = \frac{1}{2} DC$

よって、 G は辺 CD の中点である。

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

…[答]

同様に H は辺 DE の中点だから

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}{2} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

…[答]

3. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AG}|^2 &= \left| 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \right|^2 \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - 3 + \frac{9}{4} \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AG}| > 0$ より

$$|\overrightarrow{AG}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

同様に $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} &= \left(2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \right) = 3|\vec{a}|^2 + \frac{25}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 \\ &= 3 - \frac{25}{8} + 3 = \frac{23}{8} \end{aligned}$$

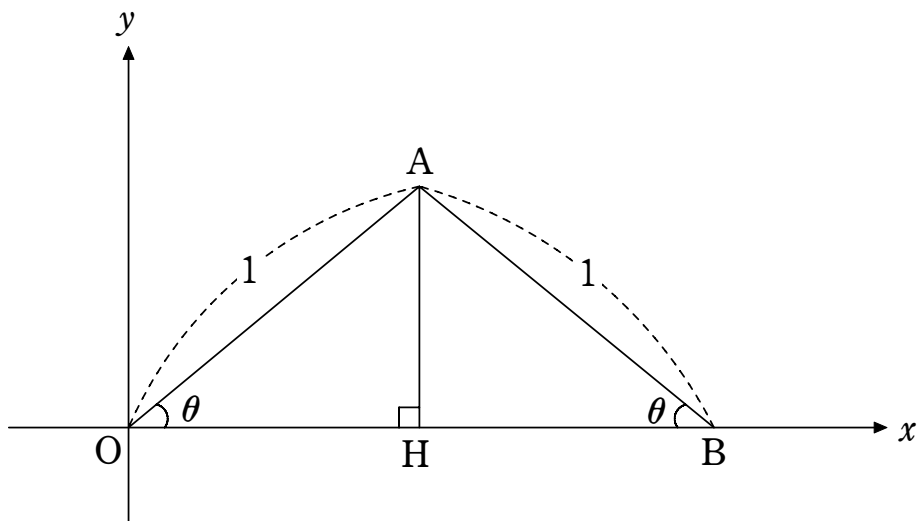
ゆえに

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{\frac{23}{8}}{\frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{23}{26} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校

[2]

1.



題意より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

頂点 A から x 軸へ下ろした垂線を AH とする。

$\triangle AOH$ において

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{OH}{AO} \\ \sin \theta = \frac{AH}{AO} \end{cases}$$

$AO=1$ より

$$\begin{cases} OH = \cos \theta \\ AH = \sin \theta \end{cases}$$

よって、頂点 A の座標は

$$(\cos \theta, \sin \theta)$$

…[答]

$\triangle AOB$ は二等辺三角形であるから

$$OB = 2OH = 2\cos \theta$$

よって、頂点 B の座標は

$$(2\cos \theta, 0)$$

…[答]

2. 放物線 $C: y=f(x)$ は $O(0, 0)$, $B(2\cos \theta, 0)$ を通るから

$$f(x) = kx(x - 2\cos \theta) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける。A($\cos \theta, \sin \theta$) を通るから

$$\sin \theta = k\cos \theta(\cos \theta - 2\cos \theta)$$

$$\sin \theta = -k\cos^2 \theta$$

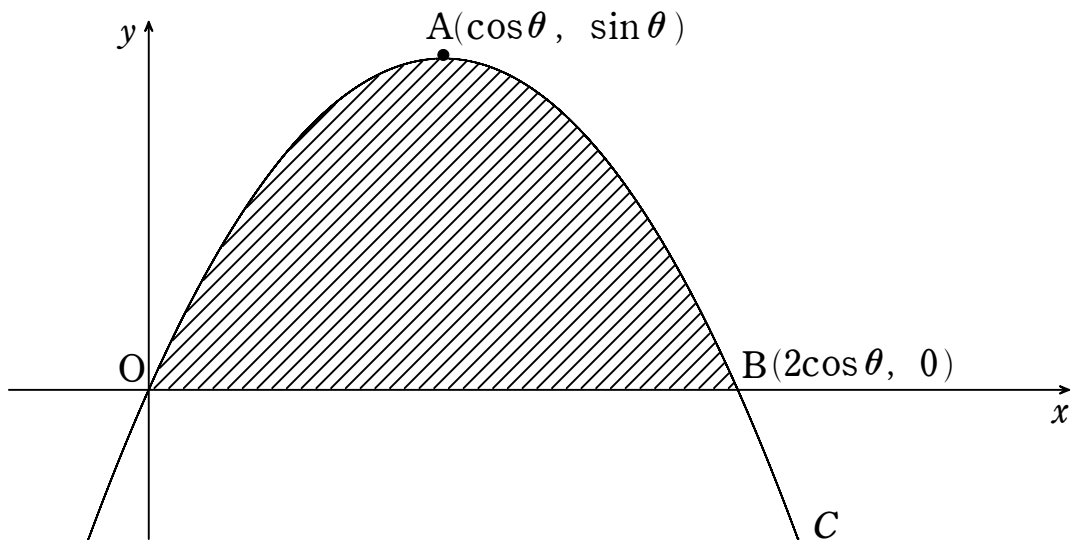
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos^2 \theta \neq 0$ で

$$k = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x(x - 2\cos \theta)$$

$$f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + \frac{2\sin \theta}{\cos \theta} x \quad \dots[\text{答}]$$

3.



図より，求める面積 S は

$$S = \int_0^{2\cos \theta} f(x) dx$$

$$= \int_0^{2\cos \theta} \left\{ -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x(x - 2\cos \theta) \right\} dx$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{6} (2\cos \theta)^3$$

$$= \frac{4}{3} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{2}{3} \sin 2\theta \quad \dots[\text{答}]$$

4. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$ であるから, S は

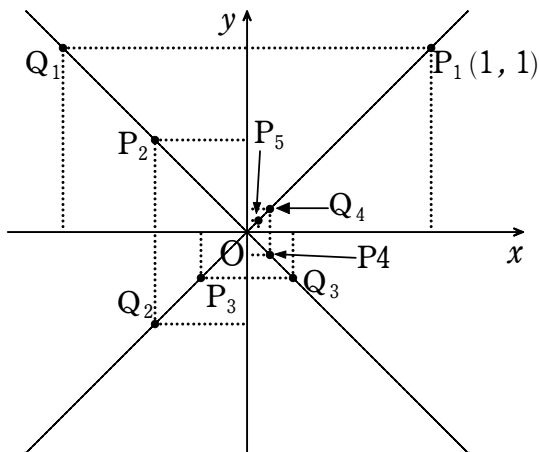
$$2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最大値 } \frac{2}{3} \quad \dots[\text{答}]$$

をとる。

高松高等予備校

[3]

1.



図より, $P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, $P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$

…[答]

2. $\overrightarrow{OP}=(1,1)$

$\overrightarrow{OP_{m+4}}$ は $\overrightarrow{OP_m}$ を反時計回りに $90^\circ \times 4$ だけ回転し $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ 倍に縮小したも

のであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_{4k+1}} &= \left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{OP_1} \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)^k (1, 1)\end{aligned}$$

したがって,

$$P_{4k+1} \left(\left(\frac{1}{16}\right)^k, \left(\frac{1}{16}\right)^k \right)$$

…[答]

3. $\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$

$$= (1, 1) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore X_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$\overrightarrow{OX_3} = \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OP_3}$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\therefore X_3 \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX_4} &= \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OP_4} \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)\end{aligned}$$

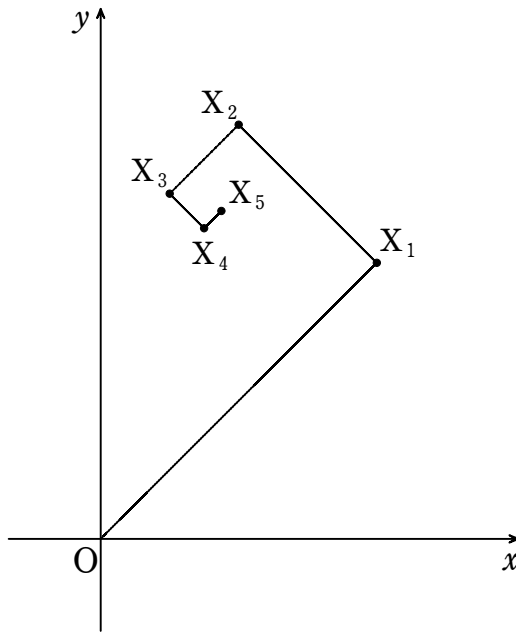
$$\therefore X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX_5} &= \overrightarrow{OX_4} + \overrightarrow{OP_5} \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \\ &= \left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$$

以上より, $X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$...[答]

また, 線分 OX_1 , X_1X_2 , X_2X_3 , X_3X_4 , X_4X_5 は図のようになる。



...[答]

$$4. \overrightarrow{OX_{4k}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5} + \overrightarrow{OP_6} + \overrightarrow{OP_7} + \overrightarrow{OP_8} + \dots \\ \dots + \overrightarrow{OP_{4k-3}} + \overrightarrow{OP_{4k-2}} + \overrightarrow{OP_{4k-1}} + \overrightarrow{OP_{4k}}$$

2.より

$$P_{4k+2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right), P_{4k+3}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k, -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right),$$

$$P_{4k+4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k, -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$$

したがって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX_{4k}} &= \sum_{l=1}^k (\overrightarrow{OP_{4l-3}} + \overrightarrow{OP_{4l-2}} + \overrightarrow{OP_{4l-1}} + \overrightarrow{OP_{4l}}) \\ &= \sum_{l=1}^k \left\{ \left(\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}, \left(\frac{1}{16}\right)^{l-1} \right) + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}, -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1} \right) + \left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}, -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^k \left(\frac{3}{8} \left(\frac{1}{16} \right)^{l-1}, \frac{9}{8} \left(\frac{1}{16} \right)^{l-1} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{3}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\}}{1 - \frac{1}{16}}, \frac{\frac{9}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\}}{1 - \frac{1}{16}} \right) \\
&= \left(\frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\}, \frac{6}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\} \right) \\
\therefore \mathbf{X}_{4k} & \left(\frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\}, \frac{6}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^k \right\} \right) \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

高松高等予備校

[4]

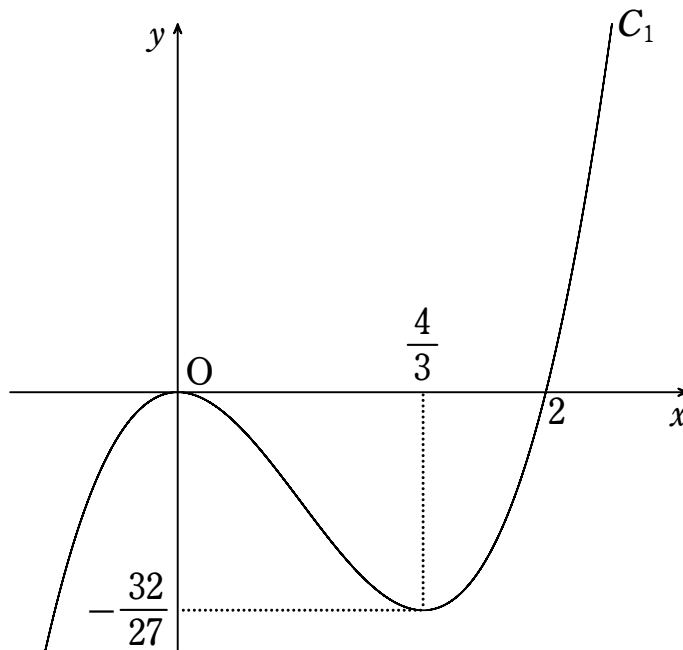
$f(x) = x^3 - 2x^2$, $g(x) = x^2 + ax + 1$ とおく。

1. $f'(x) = 3x^2 - 4x$
 $= x(3x - 4)$

関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{32}{27}$	↗

よって C_1 の概形は次の図のようになる。



2. $f(x)=0$ とすると

$$x^2(x-2)=0$$

P は原点と異なるので $x \neq 0$

$$\therefore x=2$$

ゆえに $P(2, 0)$

$f'(2)=4$ より点 P における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=4(x-2)$$

すなわち

$$y=4x-8$$

…[答]

3. ℓ が C_2 の接線になるので

$$x^2+ax+1=4x-8$$

$$\therefore x^2+(a-4)x+9=0$$

…①

2次方程式①の判別式を D とすると

$$D=(a-4)^2-4 \cdot 9=0$$

$$(a-4)^2=36$$

$$a-4=\pm 6$$

$$\therefore a=-2, 10$$

…[答]

4. 題意より $a = -2$ であるから

$$g(x) = x^2 - 2x + 1$$

また C_2 と l の接点の x 座標は①に

$a = -2$ を代入すると

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

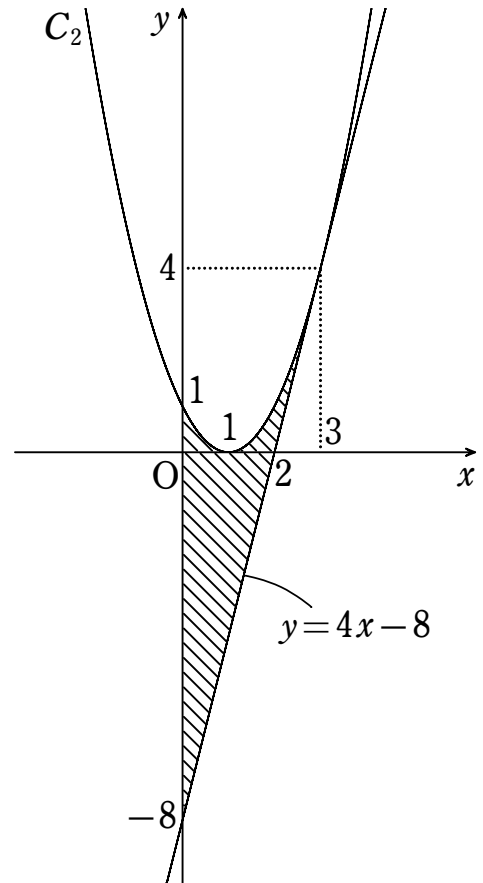
また

$$y = 4 \cdot 3 - 8 = 4$$

より C_2 と l の接点の座標は $(3, 4)$

求める面積は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \{g(x) - (4x - 8)\} dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$



…[答]

高松高等予備校