[1]

1．　$f(x)=xe^{2-x}$

について

$f'(x)=(1-x)e^{2-x}$

$f''(x)=(x-2)e^{2-x}$

増減表は次のようになる。

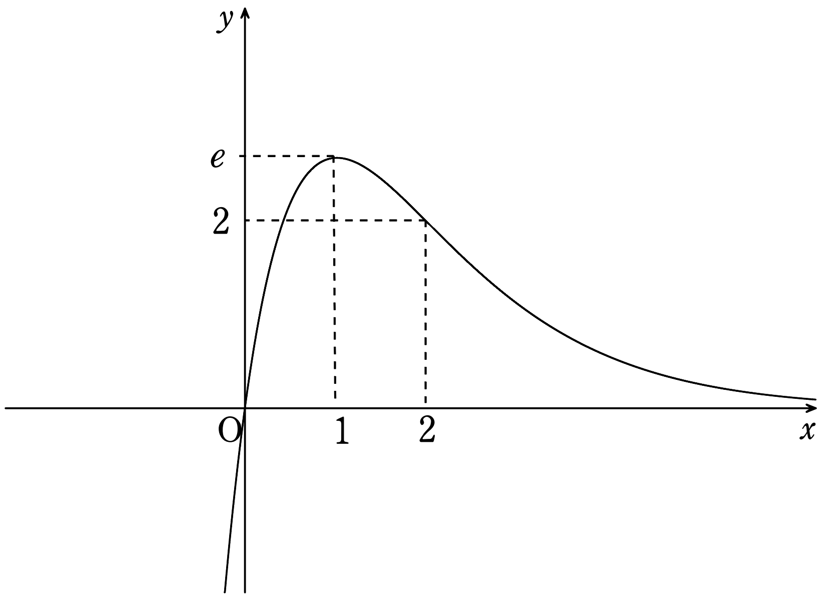
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘

$f(1)=e$，$f(2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より $y=0$ (x 軸) は漸近線で

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

から C の概形は次のようになる。



…[答]

2．C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の傾き m は

$m=f'(t)=(1-t)e^{2-t}$

$m'=(t-2)e^{2-t}$

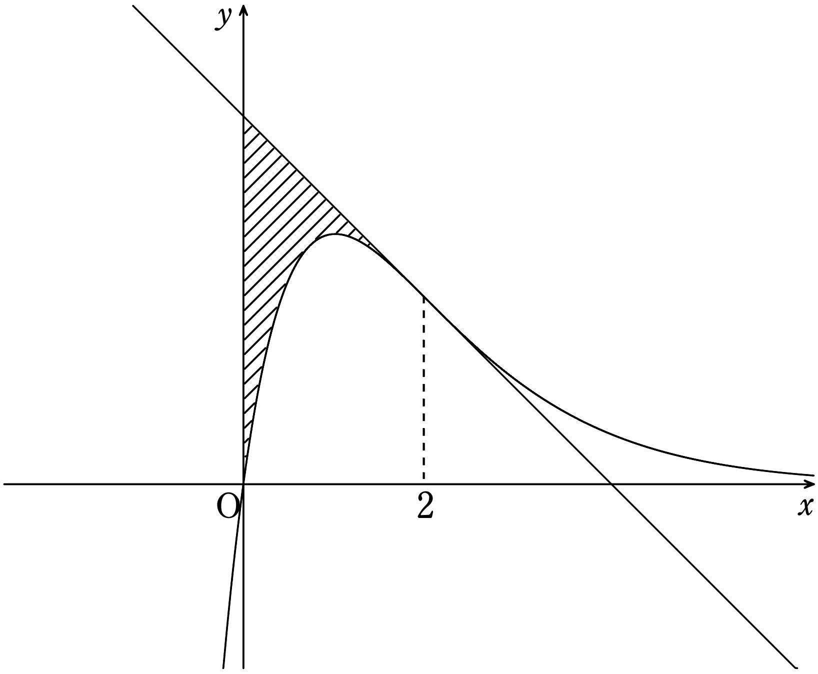
t	$\cdots$	2	$\cdots$
m'	$-$	0	$+$
m	↘	極小	↗

よって，$t=2$のとき 最小値 $m=-1$

点(2，2)を通るから，接線 ℓ の方程式は

$$y=-(x-2)+2$$
$$=-x+4 \qquad \cdots[\text{答}]$$

3．



求める面積 S は

$$S=\int_0^2(-x+4-xe^{2-x})dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^2-\int_0^2 xe^{2-x}dx$$
$$=6-\int_0^2 xe^{2-x}dx \qquad \cdots①$$

ここで　$\displaystyle\int_0^2 xe^{2-x}dx=\int_0^2 x(-e^{2-x})'dx$

$$=\left[-xe^{2-x}\right]_0^2+\int_0^2 e^{2-x}dx$$
$$=-2+\left[-e^{2-x}\right]_0^2$$
$$=-2+(-1+e^2)$$
$$=-3+e^2$$

①より　　$S=6-(-3+e^2)$

$$=9-e^2 \qquad \cdots[\text{答}]$$

[2]

1. $$3E-A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

より

$$3A-A^2=A(3E-A)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2E$$

ゆえに

$$A^2-3A+2E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \cdots[\text{答}]$$

2. まず，題意と

$$a_1A+b_1E=E+A=A+E$$

と $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\neq kE$ (k：実数) より

$$a_1=b_1=1$$

また，1．の結果より

$$a_2A+b_2E=E+A+A^2=E+A+3A-2E$$
$$=4A-E$$

より

$$a_2=4,\ b_2=-1$$

さて，題意と1．の結果より

$$\begin{aligned}a_{n+1}A+b_{n+1}E&=E+A+A^2+\cdots+A^n+A^{n+1}\\&=E+A(E+A+\cdots+A^n)\\&=E+A(a_nA+b_nE)\\&=a_n(3A-2E)+b_nA+E\\&=(3a_n+b_n)A+(-2a_n+1)E\end{aligned}$$

だから

$$\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+b_n & \cdots①\\ b_{n+1}=-2a_n+1 & \cdots②\end{cases}$$

①，②より

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=3a_{n+1}+b_{n+1}\\&=3a_{n+1}-2a_n+1\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n+1$

これより，数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$は初項$a_2-2a_1=2$，公差1の等差数列ゆえ

$$a_{n+1}-2a_n=2+(n-1)\cdot 1$$
$$=n+1$$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}+(n+1)+2=2(a_n+n+2)$

これより，数列$\{a_n+n+2\}$は初項$a_1+1+2=4$，公比2の等比数列ゆえ

$$a_n+n+2=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

ゆえに

$$a_n=2^{n+1}-n-2$$

また，②より

$$b_{n+1}=-2(2^{n+1}-n-2)+1$$
$$=-2^{n+2}+2n+5$$

$\Leftrightarrow \quad b_n=-2^{n+1}+2n+3\ (n\geqq 2)$

これは$n=1$のときも成り立つ。

ゆえに

$$\begin{cases} a_n=2^{n+1}-n-2 \\ b_n=-2^{n+1}+2n+3 \end{cases}$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

1．△ABC の重(外)心をQ とすると
直線 OQ に関する図形の対称性より
OQ=h として求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2\sin\frac{\pi}{3}\right)h$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2h$$

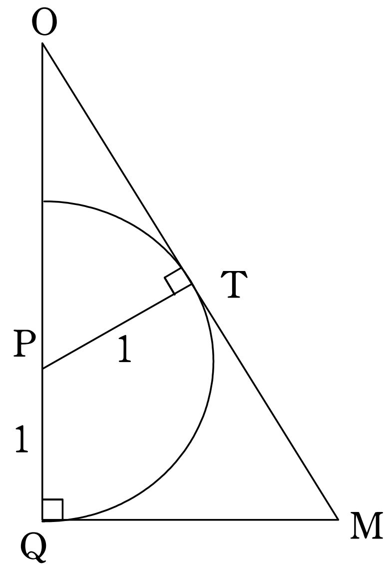
である。辺 AB の中点をM，内接球と
面OAB の接点をT として，点T は
線分 OM 上にあって

$$\mathrm{MT}=\mathrm{MQ}=\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{x}{2\sqrt{3}}$$

また，内接球の中心をP として，点 P は線分 OQ 上にあって

$$\triangle\mathrm{OTP}\backsim\triangle\mathrm{OQM},\ \mathrm{PT}=1=\mathrm{PQ}$$

だから



$$h:\frac{x}{2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{h^2+\frac{x^2}{12}}-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right):1$$
$$\Leftrightarrow\quad h=\frac{x}{2\sqrt{3}}\sqrt{h^2+\frac{x^2}{12}}-\frac{x^2}{12}$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2+\frac{x^2}{6}h+\frac{x^4}{144}=\frac{x^2}{12}h^2+\frac{x^4}{144}$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x^2}{12}-1\right)h^2=\frac{x^2}{6}h$$

$x>0$，$h>1$ だから $x>2\sqrt{3}$ であって

$$h=\frac{x^2}{6\left(\frac{x^2}{12}-1\right)}=\frac{2x^2}{x^2-12}$$

$$\therefore\quad V=\frac{\sqrt{3}\,x^4}{6(x^2-12)}$$ …[答]

2．1．より，$x>2\sqrt{3}$ だから相加平均と相乗平均の大小関係より

$$V=\frac{\sqrt{3}\,x^4}{6(x^2-12)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(x^2-12)(x^2+12)+144\sqrt{3}}{6(x^2-12)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(x^2+12)+\frac{24\sqrt{3}}{x^2-12}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(x^2-12)+\frac{24\sqrt{3}}{x^2-12}+4\sqrt{3}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{24\times 3}{6}}+4\sqrt{3}$$

$$=8\sqrt{3}$$

(等号は，$x=2\sqrt{6}$ のときに限って成り立つ)

よって V の最小値は $8\sqrt{3}$ …[答]

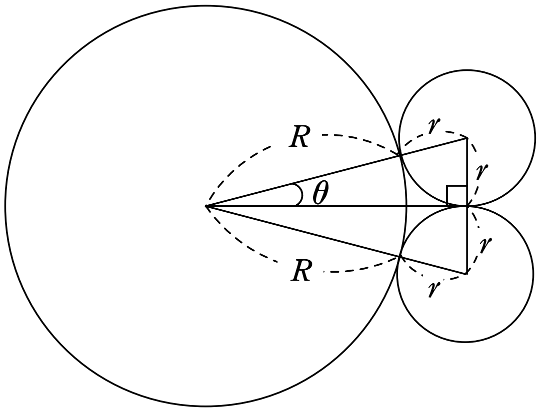
そのときの x の値は $2\sqrt{6}$ …[答]

である。

高松高等予備校

[4]

1．



図より

$$\sin\theta=\frac{r}{R+r}$$

題意より n は

$$\sin\frac{\pi}{n+1}<\frac{r}{R+r}\leqq\sin\frac{\pi}{n} \qquad \cdots①$$

をみたす 2 以上の自然数である。

よって $R=3r$ のとき

$$\sin\frac{\pi}{n+1}<\frac{1}{4}\leqq\sin\frac{\pi}{n} \qquad \cdots②$$

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{12}=t$ とおくと

$$\cos\frac{\pi}{6}=1-2t^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2t^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$t>0$ より

$$\begin{aligned}t&=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\\&>\frac{1.41\times0.73}{4}\\&>\frac{1.02}{4}\\&>\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$f(\theta)=\theta-\sin\theta$$

とおく と

$$f(0)=0$$

$$f'(\theta)=1-\cos\theta$$

$0<\theta<\pi$ において

$$f'(\theta)>0$$

よって $f(\theta)$ は単調増加で $0<\theta\leqq\pi$ のとき

$$f(\theta)>0$$

$\therefore\quad \theta>\sin\theta$ …③

よって

$$\sin\frac{\pi}{13}<\frac{\pi}{13}<\frac{3.15}{13}<\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}\leqq\sin\frac{\pi}{12}$$

よって②をみたす n は

$n=12$ …[答]

2．①，③より

$$\frac{r}{R+r}\leqq\sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\quad n<\pi\left(\frac{R+r}{r}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{R}{r}+1\right)$$

$$\therefore\quad n\leqq\pi\left(\frac{R}{r}+1\right)$$

〔終〕

高松高等予備校