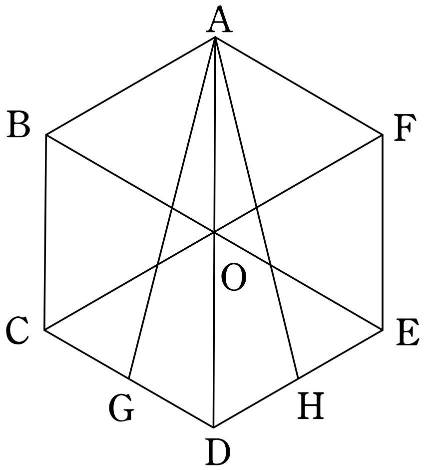
[1]

1．



正六角形 ABCDEF の外接円の中心を O とする。

四角形 ABOF，ABCO，AOEF は平行四辺形だから

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=2\vec{a}+\vec{b}$$ …[答]

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

2．正六角形は対角線 AD に関して対称だから △AGD の面積が正六角形 ABCDEF の面積の $\frac{1}{6}$ であればよい。

よって　　$(\triangle AGD)=(\triangle OCD)$

ゆえに　　$\frac{1}{2}DA\cdot DG\sin 60^\circ=\frac{1}{2}DO\cdot DC\sin 60^\circ$

$AD=2OD$ だから $DG=\frac{1}{2}DC$

よって，G は辺 CD の中点である。

$$\therefore\quad \overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$$ …[答]

同様に H は辺 DE の中点だから

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{2}=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

3. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\left|2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right|^2$$
$$=4|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{9}{4}|\vec{b}|^2$$
$$=4-3+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{13}{4}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|>0$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)=3|\vec{a}|^2+\frac{25}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$$
$$=3-\frac{25}{8}+3=\frac{23}{8}$$

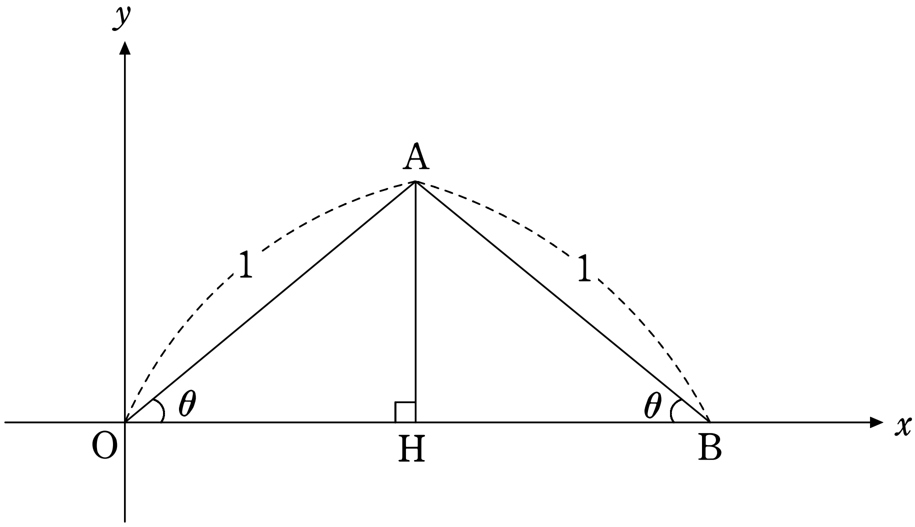
ゆえに

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}=\frac{\frac{23}{8}}{\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{23}{26}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

1．



題意より　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

頂点 A から x 軸へ下ろした垂線を AH とする。

△ AOH において

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AO}} \\ \sin\theta=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AO}} \end{cases}$$

AO=1 より

$$\begin{cases} \mathrm{OH}=\cos\theta \\ \mathrm{AH}=\sin\theta \end{cases}$$

よって，頂点 A の座標は

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ …[答]

△AOB は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{OB}=2\mathrm{OH}=2\cos\theta$$

よって，頂点 B の座標は

$(2\cos\theta,\ 0)$ …[答]

2．放物線 C：$y=f(x)$ は O$(0,\ 0)$，B$(2\cos\theta,\ 0)$ を通るから

$$f(x)=kx(x-2\cos\theta) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける。A$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通るから

$$\sin\theta=k\cos\theta(\cos\theta-2\cos\theta)$$

$$\sin\theta=-k\cos^2\theta$$

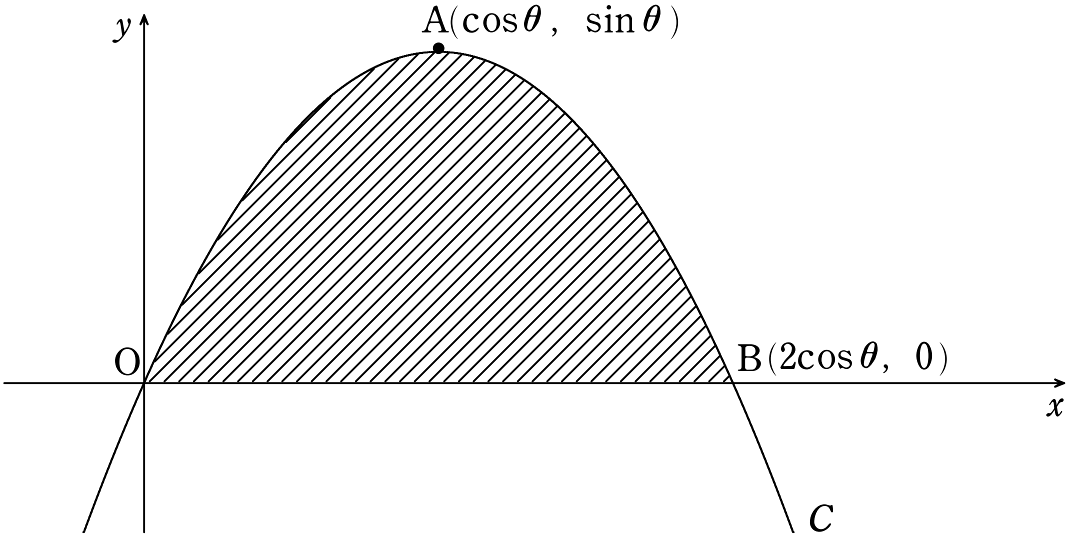
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos^2\theta \neq 0$ で

$$k=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$f(x)=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x(x-2\cos\theta)$$

$$f(x)=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x^2+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}x$$ …[答]

3．



図より，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\cos\theta}f(x)dx\\&=\int_0^{2\cos\theta}\left\{-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x(x-2\cos\theta)\right\}dx\\&=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{6}(2\cos\theta)^3\\&=\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{2}{3}\sin 2\theta\end{aligned}$$ …[答]

4．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<2\theta<\pi$ であるから，S は

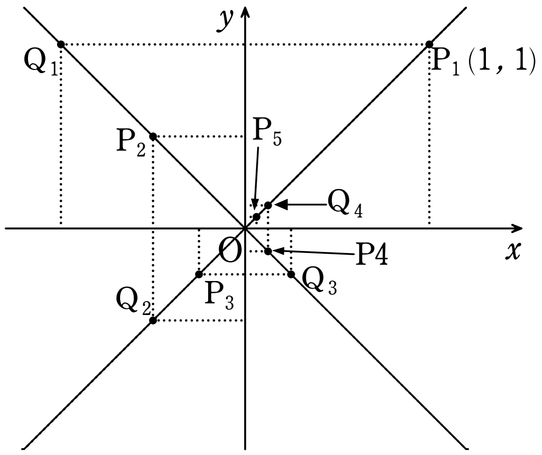
$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$ …[答]

をとる。

高松高等予備校

[3]

1．



図より，$P_2\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，$P_3\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$，$P_4\left(\dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{8}\right)$，$P_5\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{16}\right)$

…[答]

2．$\overrightarrow{OP}=(1, 1)$

$\overrightarrow{OP_{m+4}}$ は $\overrightarrow{OP_m}$ を反時計回りに $90°\times4$ だけ回転し $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ 倍に縮小したものであるから

$$\overrightarrow{OP_{4k+1}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{OP_1}$$
$$=\left(\frac{1}{16}\right)^k(1, 1)$$

したがって，

$$P_{4k+1}\left(\left(\frac{1}{16}\right)^k, \left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$$

…[答]

3．$\overrightarrow{OX_2}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$

$$=(1, 1)+\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$\therefore\quad X_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{OX_3}=\overrightarrow{OX_2}+\overrightarrow{OP_3}$

$$=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$\therefore\quad X_3\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_4}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}=\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$$

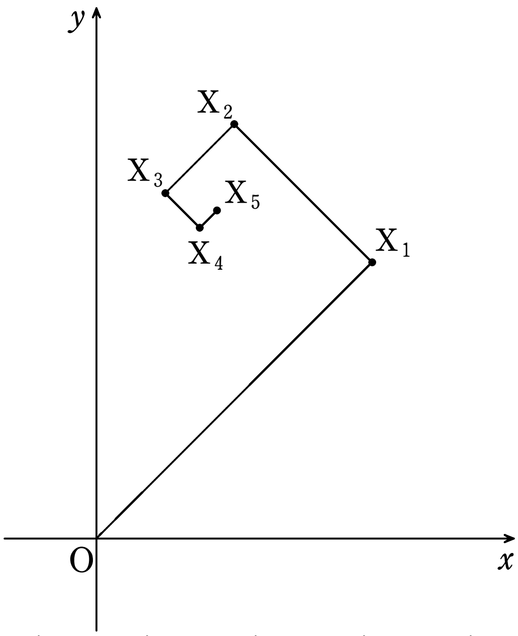
$\therefore\quad \mathrm{X}_4\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_5}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}=\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)+\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)=\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$$

$\therefore\quad \mathrm{X}_5\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$

以上より，$\mathrm{X}_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{X}_3\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$，$\mathrm{X}_4\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$，$\mathrm{X}_5\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$　…[答]

また，線分OX_1，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$，$\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$，$\mathrm{X}_3\mathrm{X}_4$，$\mathrm{X}_4\mathrm{X}_5$は図のようになる。



…[答]

4. $$\overrightarrow{\mathrm{OX}_{4k}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_7}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_8}+\cdots$$
$$\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-3}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k}}$$

2.より

$$\mathrm{P}_{4k+2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right),\quad \mathrm{P}_{4k+3}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k,-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right),$$
$$\mathrm{P}_{4k+4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k,-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$$

したがって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}_{4k}}&=\sum_{l=1}^{k}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-3}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l}}\right)\\&=\sum_{l=1}^{k}\left\{\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)+\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)+\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{3}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}, \frac{9}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}}{1-\frac{1}{16}}, \frac{\frac{9}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}}{1-\frac{1}{16}}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}, \frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}\right)$$

$\therefore\quad \mathrm{X}_{4k}\left(\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}, \frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}\right)$ …[答]

高松高等予備校

[4]

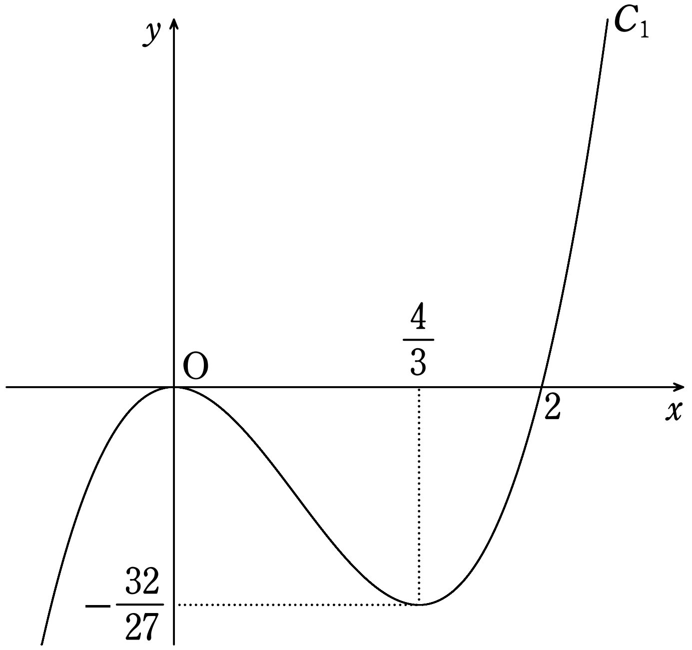
$f(x)=x^3-2x^2$, $g(x)=x^2+ax+1$ とおく。

1．
$$f'(x)=3x^2-4x$$
$$=x(3x-4)$$

関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 $-\frac{32}{27}$	$\nearrow$

よって C_1 の概形は次の図のようになる。



2．$f(x)=0$ とすると

$$x^2(x-2)=0$$

P は原点と異なるので $x \fallingdotseq 0$

$$\therefore \quad x=2$$

ゆえに P$(2,\ 0)$

$f'(2)=4$ より点 P における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=4(x-2)$$

すなわち

$$y=4x-8 \qquad \cdots[答]$$

3．ℓ が C_2 の接線になるので

$$x^2+ax+1=4x-8$$

$$\therefore \quad x^2+(a-4)x+9=0 \qquad \cdots①$$

2 次方程式①の判別式を D とすると

$$D=(a-4)^2-4\cdot 9=0$$

$$(a-4)^2=36$$

$$a-4=\pm 6$$

$$\therefore \quad a=-2,\ 10 \qquad \cdots[答]$$

4. 題意より $a=-2$ であるから

$$g(x)=x^2-2x+1$$

また C_2 と ℓ の接点の x 座標は①に

$a=-2$ を代入すると

$$x^2-6x+9=0$$

$$(x-3)^2=0$$

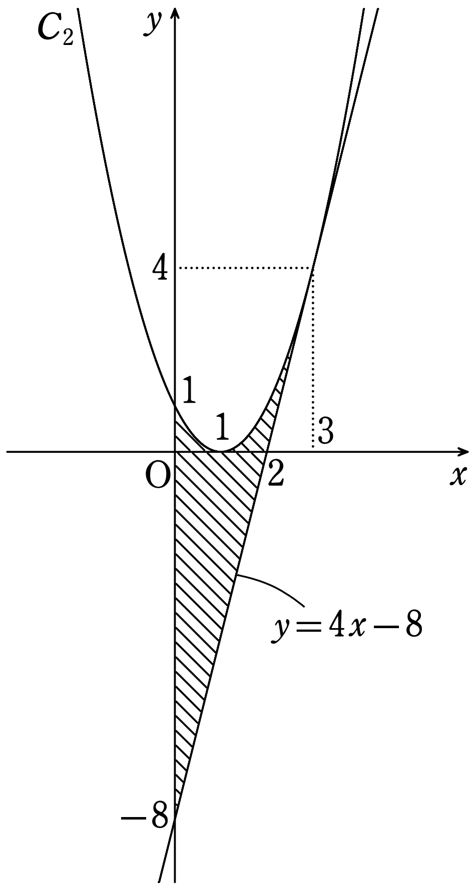
$$\therefore\quad x=3$$

また

$$y=4\cdot 3-8=4$$

より C_2 と ℓ の接点の座標は $(3,\ 4)$

求める面積は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\int_0^3\{g(x)-(4x-8)\}dx$$

$$=\int_0^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3$$

$$=9$$

…[答]

高松高等予備校

[5]

1． $\tan x = \cos x$

とすると

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

$$\sin x = \cos^2 x \quad \cdots ①$$

$$\sin x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

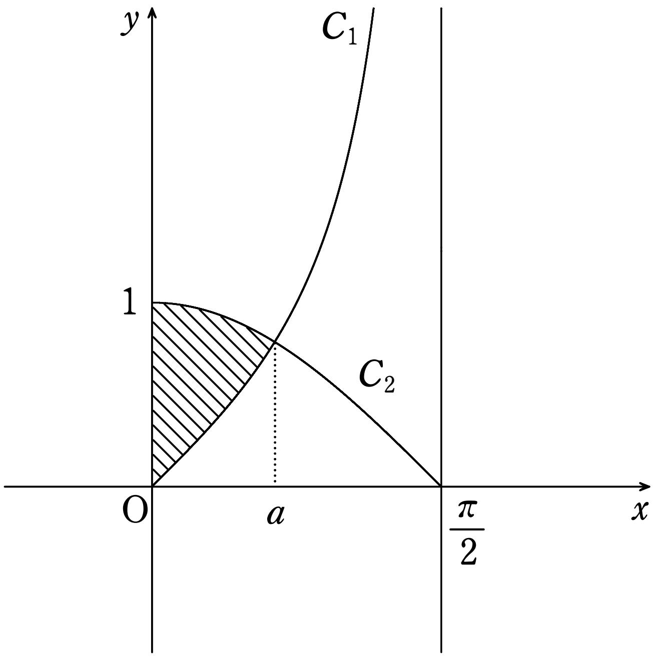
$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 \leqq \sin x < 1$ より

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

ゆえに

$$\sin a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \cdots [答]$$

2．



C_1，C_2，y 軸で囲まれた図形は図の斜線部分。よって，求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^a (\cos x - \tan x)\,dx$$

$$= \int_0^a \left(\cos x - \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^a\left\{\cos x+\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=\Big[\sin x+\log|\cos x|\Big]_0^a$$

$$=\sin a+\log|\cos a|$$

ここで，$x=a$ は①をみたすから，(1)の結果より

$$\cos^2 a=\sin a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos a>0$ であるから

$$\cos a=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

ゆえに

$$S=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\log\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ …[答]

高松高等予備校