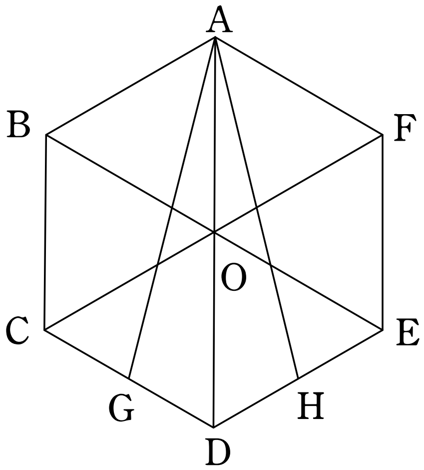
[1]

1．



正六角形 ABCDEF の外接円の中心を O とする。

四角形 ABOF，ABCO，AOEF は平行四辺形だから

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=2\vec{a}+\vec{b}$$ …[答]

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

2．正六角形は対角線 AD に関して対称だから △AGD の面積が正六角形 ABCDEF の面積の $\frac{1}{6}$ であればよい。

よって　$(\triangle \mathrm{AGD})=(\triangle \mathrm{OCD})$

ゆえに　$\frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DG}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\mathrm{DO}\cdot\mathrm{DC}\sin 60^\circ$

AD＝2OD だから $\mathrm{DG}=\frac{1}{2}\mathrm{DC}$

よって，G は辺 CD の中点である。

$$\therefore\quad \overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$$ …[答]

同様に H は辺 DE の中点だから

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{2}=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$ …[答]

3．$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2&=\left|2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right|^2\\&=4|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{9}{4}|\vec{b}|^2\\&=4-3+\frac{9}{4}\\&=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|>0$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\left(2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)=3|\vec{a}|^2+\frac{25}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2\\&=3-\frac{25}{8}+3=\frac{23}{8}\end{aligned}$$

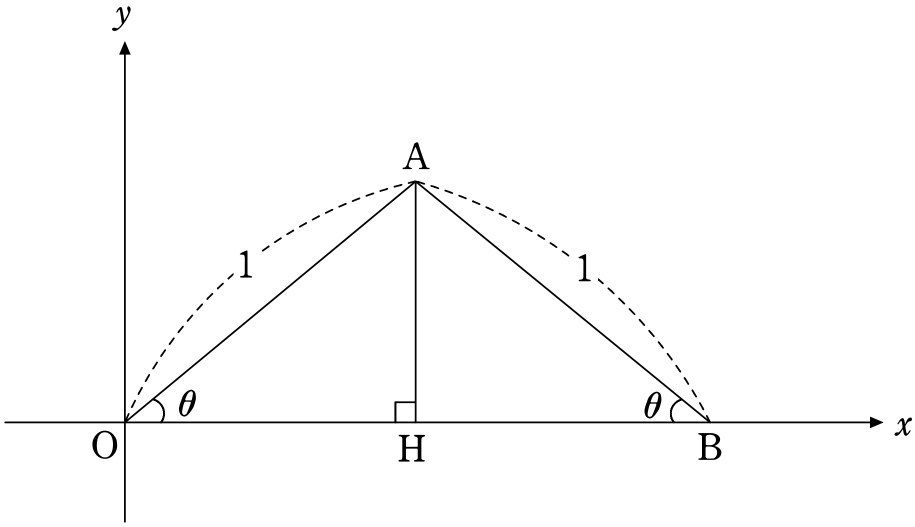
ゆえに

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}=\frac{\frac{23}{8}}{\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{23}{26}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

1．



題意より　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

頂点 A から x 軸へ下ろした垂線を AH とする。

△ AOH において

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AO}} \\ \sin\theta=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AO}} \end{cases}$$

AO=1 より

$$\begin{cases} \mathrm{OH}=\cos\theta \\ \mathrm{AH}=\sin\theta \end{cases}$$

よって，頂点 A の座標は

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ …[答]

△AOB は二等辺三角形であるから

$\mathrm{OB}=2\mathrm{OH}=2\cos\theta$

よって，頂点 B の座標は

$(2\cos\theta,\ 0)$ …[答]

2．放物線 C：$y=f(x)$ は $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2\cos\theta,\ 0)$ を通るから

$f(x)=kx(x-2\cos\theta)$　(k は定数)

とおける。$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通るから

$\sin\theta=k\cos\theta(\cos\theta-2\cos\theta)$

$\sin\theta=-k\cos^2\theta$

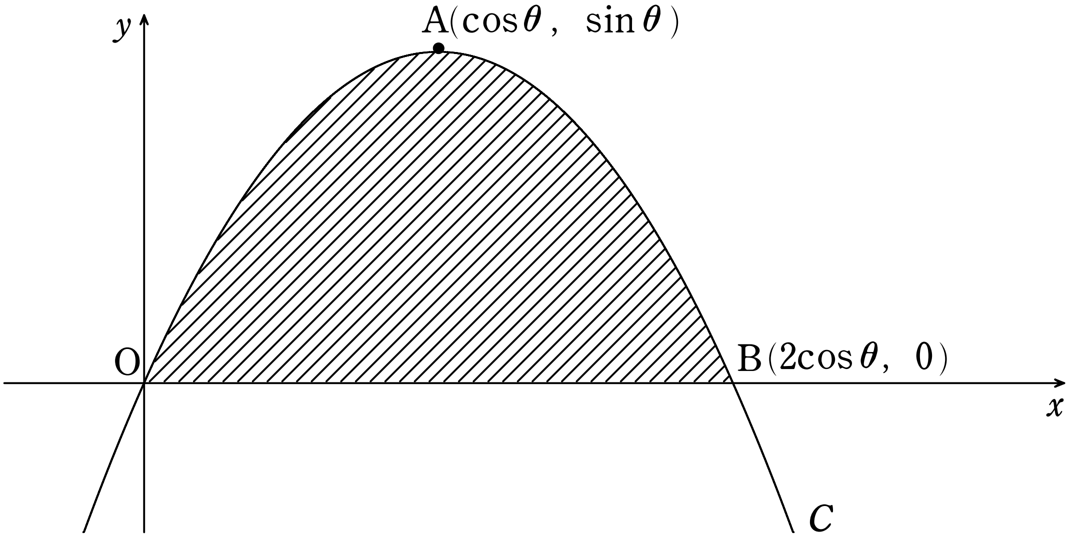
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos^2\theta \neq 0$ で

$$k=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$f(x)=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x(x-2\cos\theta)$$

$$f(x)=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x^2+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}x$$ …[答]

3．



図より，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\cos\theta}f(x)dx\\&=\int_0^{2\cos\theta}\left\{-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x(x-2\cos\theta)\right\}dx\\&=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{6}(2\cos\theta)^3\\&=\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{2}{3}\sin2\theta\end{aligned}$$ …[答]

4．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<2\theta<\pi$ であるから，S は

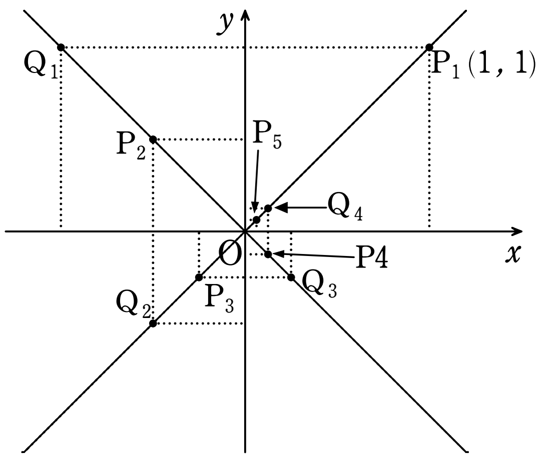
$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$ …[答]

をとる。

高松高等予備校

[3]

1．



図より，$P_2\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，$P_3\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$，$P_4\left(\dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{8}\right)$，$P_5\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{16}\right)$

…[答]

2．$\overrightarrow{OP}=(1,1)$

$\overrightarrow{OP_{m+4}}$ は $\overrightarrow{OP_m}$ を反時計回りに 90°×4 だけ回転し $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ 倍に縮小したものであるから

$$\overrightarrow{OP_{4k+1}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{OP_1}$$
$$=\left(\frac{1}{16}\right)^k(1, 1)$$

したがって，

$$P_{4k+1}\left(\left(\frac{1}{16}\right)^k, \left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$$

…[答]

3．$\overrightarrow{OX_2}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$

$$=(1,1)+\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$\therefore\quad X_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{OX_3}=\overrightarrow{OX_2}+\overrightarrow{OP_3}$

$$=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

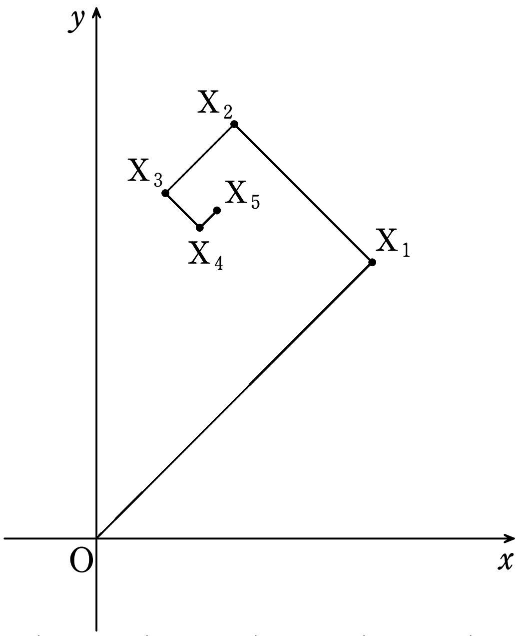
$\therefore\quad X_3\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_4}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}$$
$$=\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right)$$
$$=\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$$
$$\therefore\quad \mathrm{X}_4\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_5}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}$$
$$=\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)+\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)$$
$$=\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$$
$$\therefore\quad \mathrm{X}_5\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$$

以上より，$\mathrm{X}_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{X}_3\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$，$\mathrm{X}_4\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right)$，$\mathrm{X}_5\left(\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right)$　…[答]

また，線分 OX_1，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$，$\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$，$\mathrm{X}_3\mathrm{X}_4$，$\mathrm{X}_4\mathrm{X}_5$ は図のようになる。



…[答]

4. $$\overrightarrow{\mathrm{OX}_{4k}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_7}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_8}+\cdots$$
$$\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-3}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4k}}$$

２.より

$$\mathrm{P}_{4k+2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right),\quad \mathrm{P}_{4k+3}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k,-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right),$$
$$\mathrm{P}_{4k+4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k,-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_{4k}}=\sum_{l=1}^{k}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-3}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{4l}}\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{k}\left\{\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)+\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)+\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)\right\}$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{3}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1},\ \frac{9}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{l-1}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}}{1-\frac{1}{16}},\ \frac{\frac{9}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}}{1-\frac{1}{16}}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\},\ \frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}\right)$$

$\therefore\quad \mathrm{X}_{4k}\left(\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\},\ \frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k}\right\}\right)$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1． $\qquad f(x)=xe^{2-x}$

について

$$f'(x)=(1-x)e^{2-x}$$

$$f''(x)=(x-2)e^{2-x}$$

増減表は次のようになる。

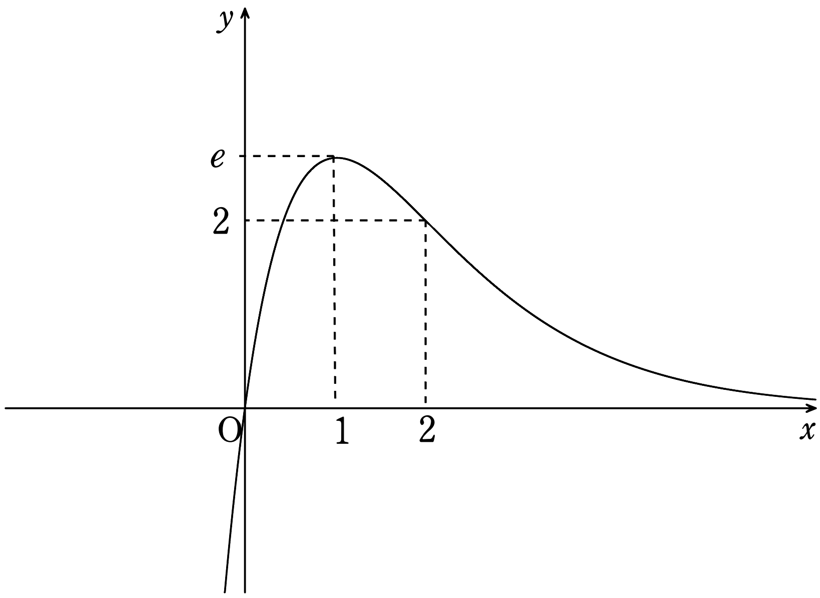
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘

$f(1)=e,\quad f(2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より $y=0$ (x 軸) は漸近線で

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

から C の概形は次のようになる。



…[答]

2．C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の傾き m は

$$m=f'(t)=(1-t)e^{2-t}$$

$$m'=(t-2)e^{2-t}$$

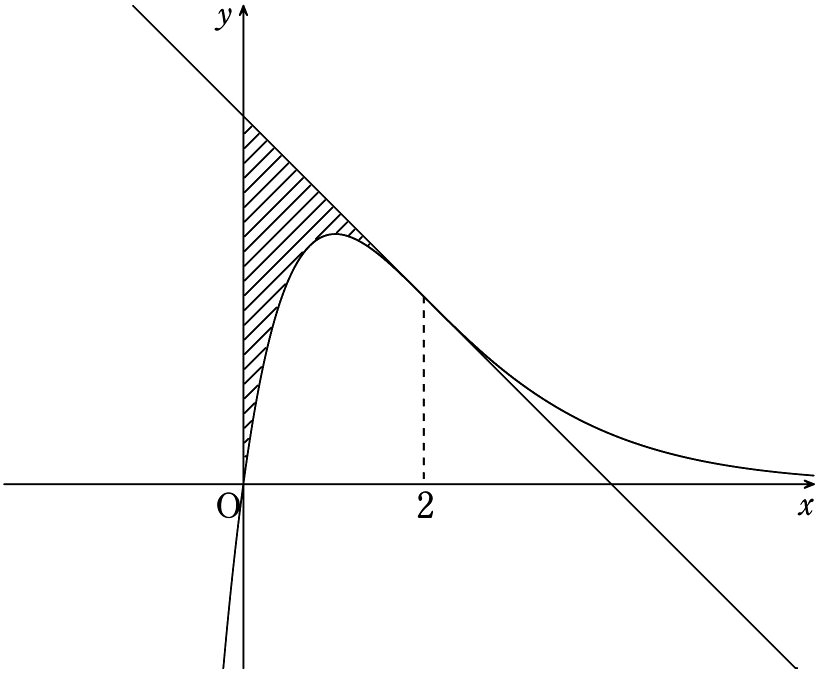
t	$\cdots$	2	$\cdots$
m'	$-$	0	$+$
m	↘	極小	↗

よって，$t=2$のとき 最小値 $m=-1$

点$(2,\ 2)$を通るから，接線 ℓ の方程式は

$$y=-(x-2)+2$$
$$=-x+4 \qquad \cdots[答]$$

3．



求める面積 S は

$$S=\int_0^2(-x+4-xe^{2-x})dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^2-\int_0^2 xe^{2-x}dx$$
$$=6-\int_0^2 xe^{2-x}dx \qquad \cdots①$$

ここで　$\displaystyle\int_0^2 xe^{2-x}dx=\int_0^2 x(-e^{2-x})'dx$

$$=\left[-xe^{2-x}\right]_0^2+\int_0^2 e^{2-x}dx$$
$$=-2+\left[-e^{2-x}\right]_0^2$$
$$=-2+(-1+e^2)$$
$$=-3+e^2$$

①より　$S=6-(-3+e^2)$

$$=9-e^2 \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校