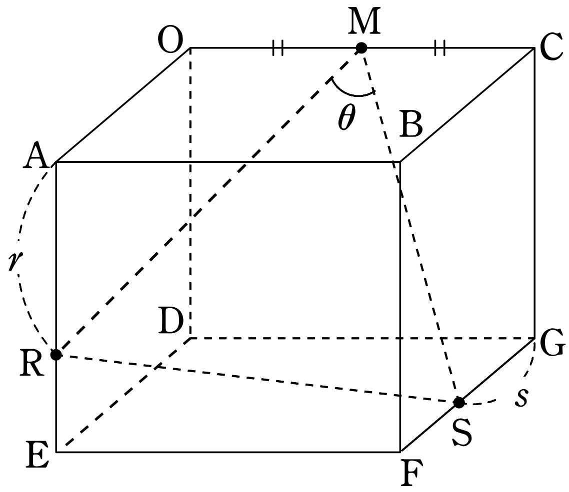
[1]



題意より

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0\\ 0<r\leqq 1,\ \ 0<s\leqq 1\end{array}\right\}\quad\cdots(*)$$

1．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$
$$=\vec{a}+r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{GS}}$$
$$=\vec{c}+\vec{d}+s\vec{a}$$
$$=s\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+r\vec{d}$$
…[答]

また

$$\overrightarrow{\mathrm{MS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=s\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$$
…[答]

2．　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}||\overrightarrow{\mathrm{MS}}|}$

$$=\frac{s-\frac{1}{4}+r}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+r^2}\sqrt{s^2+\frac{1}{4}+1}}\quad (\because\ (*)より)$$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{4s+4r-1}{\sqrt{5+4r^2}\sqrt{5+4s^2}}$　…[答]

3．$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|^2$ である。これと (*) より

$$1+\frac{1}{4}+r^2=s^2+\frac{1}{4}+1$$

$\therefore\quad r=s\quad\cdots\cdots$ ①

また，$\angle\mathrm{RMS}=90^\circ$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}=0$$

これと (*) より

$$s-\frac{1}{4}+r=0$$

$\therefore\quad s+r=\dfrac{1}{4}\quad\cdots\cdots$②

①，②を解くと

$r=\dfrac{1}{8}$，$s=\dfrac{1}{8}$　…[答]

4．　$\overrightarrow{\mathrm{RM}}=-\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-r\vec{d}$$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$$=(s-1)\vec{a}+\vec{c}+(1-r)\vec{d}\quad(\because\ 1．より)$$

であり，(*) より

$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-s)+\frac{1}{2}+(r^2-r)$$

$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+(1-s)>0\quad(\because\ (*)より)$$

したがって

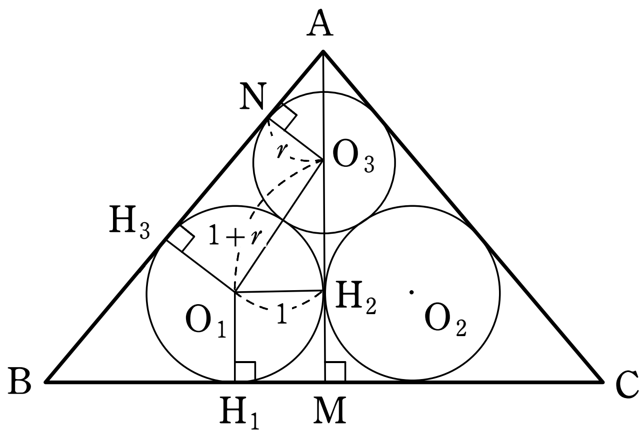
$$\cos\angle\mathrm{MRS} > 0$$

ゆえに $\angle\mathrm{MRS}$ はつねに鋭角である。 [証明終]

高松高等予備校

[2]

1.



AB＝AC であり，点 M は線分 BC の中点であるから

$$\angle AMB=90°$$

よって，AB＝5，BM＝3 から AM＝4　…[答]

2. O_1 から線分 BM，線分 AM，線分 AB に引いた垂線との交点をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とする。

$$AH_3=AH_2=AM-H_2M=4-R$$

$$BH_3=BH_1=BM-H_1M=3-R$$

$AB=AH_3+BH_3$ であるから

$$5=(4-R)+(3-R)\quad すなわち\quad 5=7-2R$$

したがって　$2R=2$　となるから　$R=1$　…[答]

3. O_3 から辺 AB に引いた垂線との交点を N とする。

$$O_1O_3=1+r\quad より\quad O_3H_2=\sqrt{(1+r)^2-1^2}=\sqrt{r^2+2r}$$

よって　$AO_3=AH_2-O_3H_2=3-\sqrt{r^2+2r}$

$\triangle AO_3N$ において $\angle O_3NA=90°$ であることから $\dfrac{r}{AO_3}=\sin\angle O_3AN$

ところで　$\triangle ABM$ において $\angle AMB=90°$ であるから $\sin\angle BAM=\dfrac{3}{5}$

$\sin\angle O_3AN=\sin\angle BAM$ より

$$\frac{r}{AO_3}=\frac{3}{5}$$

$$5r=3AO_3$$

$$5r=9-3\sqrt{r^2+2r}$$

$$3\sqrt{r^2+2r}=9-5r \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $9-5r>0$ として ① の両辺を 2 乗して整理すると

$$16r^2-108r+81=0$$

$$r=\frac{54\pm\sqrt{54^2-16\cdot 81}}{16}=\frac{27\pm 9\sqrt{5}}{8}$$

$0<r<\dfrac{9}{5}$ であることから $r=\dfrac{27-9\sqrt{5}}{8}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1 . n が自然数のとき

$$\sqrt{2}<a_n \quad \cdots\cdots ①$$

を数学的帰納法で示す。

[i]　$n=1$ のとき

$$a_1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}=\sqrt{4}-\sqrt{2}>0$$

$$\therefore \quad a_1>\sqrt{2}$$

よって，$n=1$ のとき① は成り立つ。

[ii]　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$\sqrt{2}<a_k \quad \cdots\cdots ②$$

条件から

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+2}{a_k+2}=2-\frac{2}{a_k+2}$$

② より，$a_k+2>\sqrt{2}+2$

両辺は正だから

$$0<\frac{1}{a_k+2}<\frac{1}{\sqrt{2}+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{2}{a_k+2}>-2+\sqrt{2}$$

$$2-\frac{2}{a_k+2}>\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad a_{k+1}>\sqrt{2}$$

したがって，$n=k+1$ のとき，① は成り立つ。

[i], [ii] より，n が自然数のとき　$\sqrt{2}<a_n$　　[証明終]

2 .

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2a_n+2}{a_n+2}$$

$$=\frac{a_n{}^2-2}{a_n+2}$$

$$=\frac{(a_n+\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2})}{a_n+2}$$

1 . より，$a_n>\sqrt{2}$ であるから，$a_n-a_{n+1}>0$

よって，$a_{n+1}<a_n$ [証明終]

3．n が自然数のとき

$$a_n-\sqrt{2}\leqq\frac{(2-\sqrt{2})^n}{3^{n-1}} \quad \cdots\cdots ③$$

を数学的帰納法で示す。

[i]　$n=1$ のとき

③ の左辺は $a_1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$

右辺は $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3^0}=2-\sqrt{2}$

よって，$n=1$ のとき③ は成り立つ。

[ii]　$n=k$ のとき③ が成り立つと仮定すると

$$a_k-\sqrt{2}\leqq\frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}} \quad \cdots\cdots ④$$

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{2a_k+2}{a_k+2}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}(a_k-\sqrt{2})$$

ここで１．より，$a_k>\sqrt{2}$ であるから

$$a_k+2>2+\sqrt{2}>3$$

$$\therefore 0<\frac{1}{a_k+2}<\frac{1}{3}$$

$2-\sqrt{2}>0$ より，$0<\dfrac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}<\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

$a_k-\sqrt{2}>0$ より

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}(a_k-\sqrt{2})<\frac{2-\sqrt{2}}{3}(a_k-\sqrt{2})$$

よって，④ より

$$a_{k+1}-\sqrt{2}\leqq\frac{2-\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})^{k+1}}{3^{(k+1)-1}}$$

$n=k+1$ のとき，③ は成り立つ。

[i], [ii] より，n が自然数のとき③ が成り立つ。 [証明終]

高松高等予備校

[4]

1．頂点が点 $\left(\dfrac{3}{2}a,\ -a\right)$ であるから，k を 0 でない定数として

$$y=f(x)=k\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

とおくことができて，点 $(a,\ 0)$ を通るので

$$0=k\left(a-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$0=\frac{1}{4}ka^2-a$$

$a \fallingdotseq 0$ であるから

$$k=\frac{4}{a}$$

これは $k \fallingdotseq 0$ を満たす。

よって

$$y=f(x)=\frac{4}{a}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$y=f(x)=\frac{4}{a}x^2-12x+8a$$ …[答]

2．$f(x)=0$ とすると

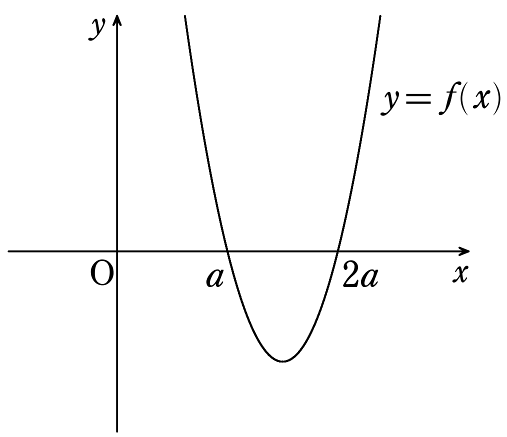
$$\frac{4}{a}x^2-12x+8a=0$$

$$x^2-3ax+2a^2=0$$

$$(x-a)(x-2a)=0$$

$$x=a,\ 2a$$

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



したがって

$$S(a)=\int_a^{2a}\left(-\frac{4}{a}x^2+12x-8a\right)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3a}x^3+6x^2-8ax\right]_a^{2a}$$

$$=-\frac{4}{3a}(8a^3-a^3)+6(4a^2-a^2)-8a(2a-a)$$

$$=\frac{2}{3}a^2$$ …[答]

3．２． の結果と $S(2^n)>7^{10}$ より

$$\frac{2}{3}\cdot 2^{2n}>7^{10}$$

$$2^{2n+1}>3\cdot 7^{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}2^{2n+1}>\log_{10}3\cdot 7^{10}$$

$$(2n+1)\log_{10}2>\log_{10}3+10\log_{10}7$$

$$n>\frac{\log_{10}3+10\log_{10}7-\log_{10}2}{2\log_{10}2}$$

これと題意より

$$n>\frac{0.4771+10\times 0.8451-0.3010}{2\times 0.3010}$$

$$=\frac{8.6271}{0.6020}$$

$$=14.3\cdots\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は

$$n=15$$ …[答]

高松高等予備校