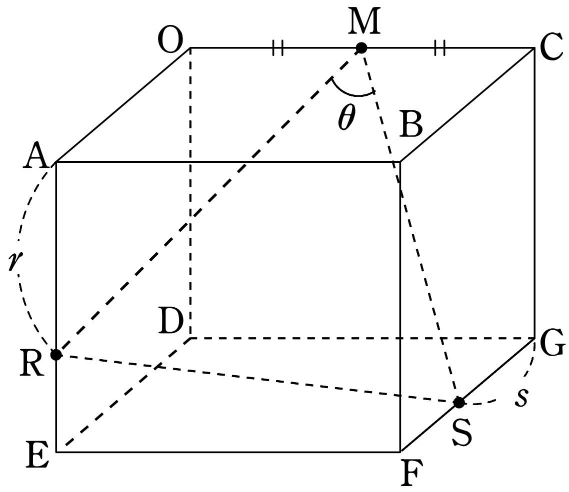
[1]



題意より

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1 \\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \\ 0<r\leqq 1,\ \ 0<s\leqq 1 \end{array}\right\} \quad \cdots(*)$$

1．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$
$$=\vec{a}+r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{GS}}$$
$$=\vec{c}+\vec{d}+s\vec{a}$$
$$=s\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+r\vec{d}$$

…[答]

また

$$\overrightarrow{\mathrm{MS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=s\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$$

…[答]

2．　　$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}||\overrightarrow{\mathrm{MS}}|}$$

$$=\frac{s-\frac{1}{4}+r}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+r^2}\sqrt{s^2+\frac{1}{4}+1}}\quad(\because\ (*)\text{より})$$

$$\therefore\quad\cos\theta=\frac{4s+4r-1}{\sqrt{5+4r^2}\sqrt{5+4s^2}}$$ …[答]

3．$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|^2$ である。これと (*) より

$$1+\frac{1}{4}+r^2=s^2+\frac{1}{4}+1$$

$$\therefore\quad r=s\quad\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{RMS}=90^\circ$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}=0$$

これと (*) より

$$s-\frac{1}{4}+r=0$$

$$\therefore\quad s+r=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots②$$

①，②を解くと

$$r=\frac{1}{8},\ s=\frac{1}{8}$$ …[答]

4．　　$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}=-\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=(s-1)\vec{a}+\vec{c}+(1-r)\vec{d}\quad(\because\ 1．\text{より})$$

であり，(*) より

$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-s)+\frac{1}{2}+(r^2-r)$$

$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+(1-s)>0\quad(\because\ (*)\text{より})$$

したがって

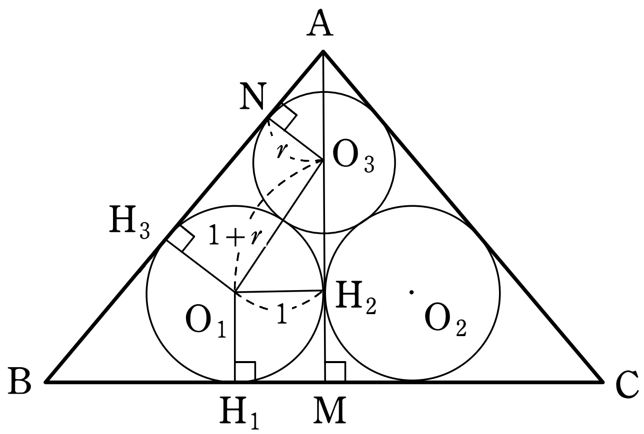
$$\cos\angle \mathrm{MRS} > 0$$

ゆえに $\angle \mathrm{MRS}$ はつねに鋭角である。 [証明終]

高松高等予備校

[2]

1．



AB＝AC であり，点 M は線分 BC の中点であるから

$\angle AMB = 90^\circ$

よって，AB＝5，BM＝3 から AM＝4　…[答]

2．O_1 から線分 BM，線分 AM，線分 AB に引いた垂線との交点をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とする。

$AH_3 = AH_2 = AM - H_2M = 4 - R$

$BH_3 = BH_1 = BM - H_1M = 3 - R$

$AB = AH_3 + BH_3$ であるから

$5 = (4 - R) + (3 - R)$　すなわち　$5 = 7 - 2R$

したがって　$2R = 2$　となるから　$R = 1$　…[答]

3．O_3 から辺 AB に引いた垂線との交点を N とする。

$O_1O_3 = 1 + r$　より　$O_3H_2 = \sqrt{(1+r)^2 - 1^2} = \sqrt{r^2 + 2r}$

よって　$AO_3 = AH_2 - O_3H_2 = 3 - \sqrt{r^2 + 2r}$

$\triangle AO_3N$ において $\angle O_3NA = 90^\circ$ であることから $\dfrac{r}{AO_3} = \sin\angle O_3AN$

ところで　$\triangle ABM$ において $\angle AMB = 90^\circ$ であるから $\sin\angle BAM = \dfrac{3}{5}$

$\sin\angle O_3AN = \sin\angle BAM$ より

$$\frac{r}{AO_3} = \frac{3}{5}$$

$$5r = 3AO_3$$

$$5r = 9 - 3\sqrt{r^2 + 2r}$$

$$3\sqrt{r^2 + 2r} = 9 - 5r \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $9 - 5r > 0$ として ① の両辺を 2 乗して整理すると

$$16r^2 - 108r + 81 = 0$$

$$r = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 16 \cdot 81}}{16} = \frac{27 \pm 9\sqrt{5}}{8}$$

$0 < r < \dfrac{9}{5}$ であることから $r = \dfrac{27 - 9\sqrt{5}}{8}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．頂点が点 $\left(\dfrac{3}{2}a,\ -a\right)$ であるから，k を 0 でない定数として

$$y=f(x)=k\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

とおくことができて，点 $(a,\ 0)$ を通るので

$$0=k\left(a-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$0=\frac{1}{4}ka^2-a$$

$a\neq 0$ であるから

$$k=\frac{4}{a}$$

これは $k\neq 0$ を満たす。

よって

$$y=f(x)=\frac{4}{a}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$y=f(x)=\frac{4}{a}x^2-12x+8a$$ …[答]

2．$f(x)=0$ とすると

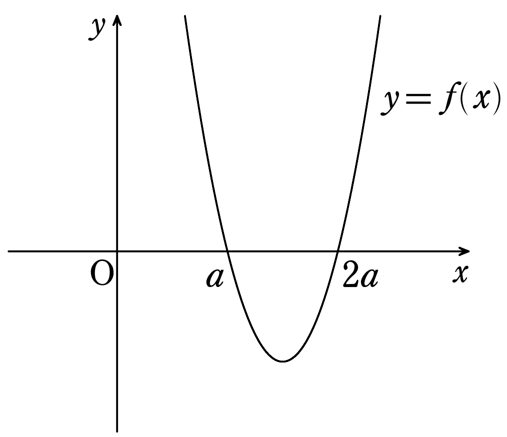
$$\frac{4}{a}x^2-12x+8a=0$$

$$x^2-3ax+2a^2=0$$

$$(x-a)(x-2a)=0$$

$$x=a,\ 2a$$

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



したがって

$$S(a)=\int_a^{2a}\left(-\frac{4}{a}x^2+12x-8a\right)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3a}x^3+6x^2-8ax\right]_a^{2a}$$

$$=-\frac{4}{3a}(8a^3-a^3)+6(4a^2-a^2)-8a(2a-a)$$

$$=\frac{2}{3}a^2$$ …[答]

3．2． の結果と $S(2^n)>7^{10}$ より

$$\frac{2}{3}\cdot 2^{2n}>7^{10}$$

$$2^{2n+1}>3\cdot 7^{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}2^{2n+1}>\log_{10}3\cdot 7^{10}$$

$$(2n+1)\log_{10}2>\log_{10}3+10\log_{10}7$$

$$n>\frac{\log_{10}3+10\log_{10}7-\log_{10}2}{2\log_{10}2}$$

これと題意より

$$n>\frac{0.4771+10\times 0.8451-0.3010}{2\times 0.3010}$$

$$=\frac{8.6271}{0.6020}$$

$$=14.3\cdots\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は

$$n=15$$ …[答]

高松高等予備校

[4]

1. $$f(x)=x+(e^x-b)e^x$$
について
$$f'(x)=1+e^{2x}+(e^x-b)e^x$$
$$=2e^{2x}-be^x+1$$
$$=2\left(e^x-\frac{b}{4}\right)^2-\frac{b^2-8}{8}$$
$b>2\sqrt{2}$ より
$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=1>0,$$
$$f'\left(\log\frac{b}{4}\right)=-\frac{b^2-8}{8}<0,$$
$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$$
であるから，$f'(x)=0$ は相異なる 2 つの実数解 α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ をもつ。
また，$2t^2-bt+1=0$ を解くと
$$t=\frac{b\pm\sqrt{b^2-8}}{4}$$
であるから
$$\begin{cases}\alpha=\log\dfrac{b-\sqrt{b^2-8}}{4}\\[2ex] \beta=\log\dfrac{b+\sqrt{b^2-8}}{4}\end{cases}$$
である。よって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また
$$f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{2}f'(\alpha)-\frac{b}{2}e^{\alpha}-\frac{1}{2}$$
$$=\log\frac{b-\sqrt{b^2-8}}{4}-\frac{b^2-b\sqrt{b^2-8}+4}{8},$$
$$f(\beta)=\beta+\frac{1}{2}f'(\beta)-\frac{b}{2}e^{\beta}-\frac{1}{2}$$

$$=\log\frac{b+\sqrt{b^2-8}}{4}-\frac{b^2+b\sqrt{b^2-8}+4}{8},$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

ゆえに，求める a の範囲は

$$\log\frac{b+\sqrt{b^2-8}}{4}-\frac{b^2+b\sqrt{b^2-8}+4}{8}<a$$

$$<\log\frac{b-\sqrt{b^2-8}}{4}-\frac{b^2-b\sqrt{b^2-8}+4}{8}\quad\cdots[答]$$

2．A$(a,\ b)$，P$(x,\ e^x)$ とし

$$g(x)=\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+(e^x-b)^2$$

とおくと

$$g'(x)=2(x-a)+2(e^x-b)e^x$$
$$=2\{f(x)-a\}$$

よって，a が１．で求めた範囲にあるとき

$$c_1<\alpha<c_2<\beta<c_3$$

を満たす 3 つの実数 c_1，c_2，c_3 が存在して

$$g'(c_1)=g'(c_2)=g'(c_3)=0$$

となり，$g(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	c_1	$\cdots$	c_2	$\cdots$	c_3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

また

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

より $g(c_1)$，$g(c_3)$ のうち小さくない方を q として，正の数 r を

$$q<r^2<g(c_2)$$

となるように選ぶことができ

$$x_1<c_1<x_2<c_2<x_3<c_3<x_4$$

を満たす 4 つの実数 x_1，x_2，x_3，x_4 が存在して

$$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=r^2$$

となる。このとき

$$\mathrm{P}_k\left(x_k,\ e^{x_k}\right)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

とおくと

$$\mathrm{AP}_k=r$$

となり，題意は成り立つ。

[証明終]

高松高等予備校