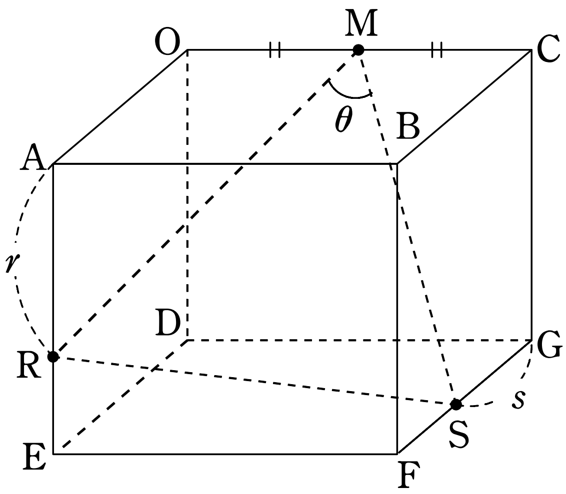
[1]



題意より

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1 \\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \\ 0<r\leqq 1,\ 0<s\leqq 1 \end{array}\right\} \quad \cdots(*)$$

1．

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}$$
$$=\vec{a}+r\vec{d}$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GS}$$
$$=\vec{c}+\vec{d}+s\vec{a}$$
$$=s\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

より

$$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OM}$$
$$=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+r\vec{d} \qquad \cdots[答]$$

また

$$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}$$
$$=s\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d} \qquad \cdots[答]$$

2．　$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}||\overrightarrow{\mathrm{MS}}|}$$

$$=\frac{s-\dfrac{1}{4}+r}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+r^2}\sqrt{s^2+\dfrac{1}{4}+1}}\quad(\because\ (*)\text{より})$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{4s+4r-1}{\sqrt{5+4r^2}\sqrt{5+4s^2}}$$ …[答]

3．$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|^2$ である。これと (*) より

$$1+\frac{1}{4}+r^2=s^2+\frac{1}{4}+1$$

$\therefore\quad r=s\quad$ …… ①

また，$\angle\mathrm{RMS}=90^\circ$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}=0$$

これと (*) より

$$s-\frac{1}{4}+r=0$$

$\therefore\quad s+r=\dfrac{1}{4}\quad$ ……②

①，②を解くと

$$r=\frac{1}{8},\ s=\frac{1}{8}$$ …[答]

4．　$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}=-\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=(s-1)\vec{a}+\vec{c}+(1-r)\vec{d}\quad(\because\ \ 1．\text{より})$$

であり，(*) より

$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-s)+\frac{1}{2}+(r^2-r)$$

$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+(1-s)>0\quad(\because\ (*)\text{より})$$

したがって

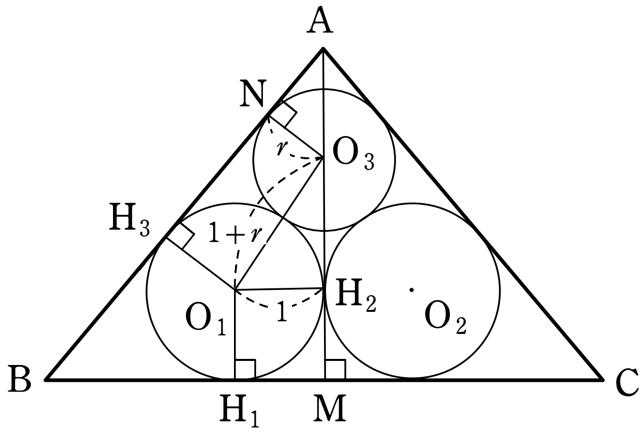
$$\cos\angle \mathrm{MRS} > 0$$

ゆえに $\angle \mathrm{MRS}$ はつねに鋭角である。 [証明終]

高松高等予備校

[2]

1.



AB＝AC であり，点 M は線分 BC の中点であるから

$\angle AMB = 90°$

よって，$AB=5$，$BM=3$ から $AM=4$ …[答]

2. O_1 から線分 BM，線分 AM，線分 AB に引いた垂線との交点をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とする。

$AH_3 = AH_2 = AM - H_2M = 4 - R$

$BH_3 = BH_1 = BM - H_1M = 3 - R$

$AB = AH_3 + BH_3$ であるから

$5 = (4-R)+(3-R)$　すなわち　$5 = 7-2R$

したがって　$2R=2$　となるから　$R=1$ …[答]

3. O_3 から辺 AB に引いた垂線との交点を N とする。

$O_1O_3 = 1+r$　より　$O_3H_2 = \sqrt{(1+r)^2-1^2} = \sqrt{r^2+2r}$

よって　$AO_3 = AH_2 - O_3H_2 = 3-\sqrt{r^2+2r}$

$\triangle AO_3N$ において $\angle O_3NA = 90°$ であることから $\dfrac{r}{AO_3} = \sin\angle O_3AN$

ところで　$\triangle ABM$ において $\angle AMB = 90°$ であるから $\sin\angle BAM = \dfrac{3}{5}$

$\sin\angle O_3AN = \sin\angle BAM$ より

$$\frac{r}{AO_3} = \frac{3}{5}$$

$$5r = 3AO_3$$

$$5r = 9 - 3\sqrt{r^2 + 2r}$$

$$3\sqrt{r^2 + 2r} = 9 - 5r \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $9 - 5r > 0$ として ① の両辺を 2 乗して整理すると

$$16r^2 - 108r + 81 = 0$$

$$r = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 16 \cdot 81}}{16} = \frac{27 \pm 9\sqrt{5}}{8}$$

$0 < r < \dfrac{9}{5}$ であることから $r = \dfrac{27 - 9\sqrt{5}}{8}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．n が自然数のとき

$$\sqrt{2}<a_n \quad \cdots\cdots ①$$

を数学的帰納法で示す。

[i]　$n=1$ のとき

$$a_1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}=\sqrt{4}-\sqrt{2}>0$$

$$\therefore \quad a_1>\sqrt{2}$$

よって，$n=1$ のとき① は成り立つ。

[ii]　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$\sqrt{2}<a_k \quad \cdots\cdots ②$$

条件から

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+2}{a_k+2}=2-\frac{2}{a_k+2}$$

② より，$a_k+2>\sqrt{2}+2$

両辺は正だから

$$0<\frac{1}{a_k+2}<\frac{1}{\sqrt{2}+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{2}{a_k+2}>-2+\sqrt{2}$$

$$2-\frac{2}{a_k+2}>\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad a_{k+1}>\sqrt{2}$$

したがって，$n=k+1$ のとき，① は成り立つ。

[i], [ii] より，n が自然数のとき　$\sqrt{2}<a_n$　　[証明終]

2．

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2a_n+2}{a_n+2}$$

$$=\frac{a_n{}^2-2}{a_n+2}$$

$$=\frac{(a_n+\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2})}{a_n+2}$$

1．より，$a_n>\sqrt{2}$ であるから，$a_n-a_{n+1}>0$

よって，$a_{n+1}<a_n$ [証明終]

3．n が自然数のとき

$$a_n-\sqrt{2}\leqq\frac{(2-\sqrt{2})^n}{3^{n-1}}\quad\cdots\cdots③$$

を数学的帰納法で示す。

[i]　$n=1$ のとき

③ の左辺は $a_1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$

右辺は $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3^0}=2-\sqrt{2}$

よって，$n=1$ のとき③ は成り立つ。

[ii]　$n=k$ のとき③ が成り立つと仮定すると

$$a_k-\sqrt{2}\leqq\frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}}\quad\cdots\cdots④$$

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{2a_k+2}{a_k+2}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}(a_k-\sqrt{2})$$

ここで1．より，$a_k>\sqrt{2}$ であるから

$$a_k+2>2+\sqrt{2}>3$$

$$\therefore 0<\frac{1}{a_k+2}<\frac{1}{3}$$

$2-\sqrt{2}>0$ より，$0<\dfrac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}<\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

$a_k-\sqrt{2}>0$ より

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{a_k+2}(a_k-\sqrt{2})<\frac{2-\sqrt{2}}{3}(a_k-\sqrt{2})$$

よって，④ より

$$a_{k+1}-\sqrt{2}\leqq\frac{2-\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})^{k+1}}{3^{(k+1)-1}}$$

$n=k+1$ のとき，③ は成り立つ。

[i], [ii] より，n が自然数のとき③ が成り立つ。 [証明終]

高松高等予備校

[4]

1．頂点が点 $\left(\dfrac{3}{2}a,\ -a\right)$ であるから，k を 0 でない定数として

$$y=f(x)=k\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

とおくことができて，点 $(a,\ 0)$ を通るので

$$0=k\left(a-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$0=\frac{1}{4}ka^2-a$$

$a\neq 0$ であるから

$$k=\frac{4}{a}$$

これは $k\neq 0$ を満たす。

よって

$$y=f(x)=\frac{4}{a}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$$

$$y=f(x)=\frac{4}{a}x^2-12x+8a$$ …[答]

2．$f(x)=0$ とすると

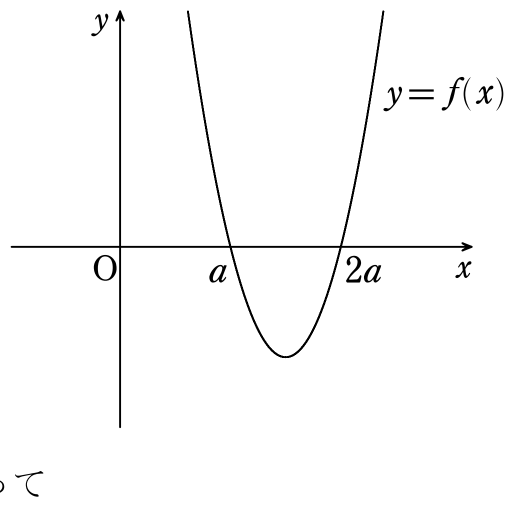
$$\frac{4}{a}x^2-12x+8a=0$$

$$x^2-3ax+2a^2=0$$

$$(x-a)(x-2a)=0$$

$$x=a,\ 2a$$

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



したがって

$$S(a)=\int_a^{2a}\left(-\frac{4}{a}x^2+12x-8a\right)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3a}x^3+6x^2-8ax\right]_a^{2a}$$

$$=-\frac{4}{3a}(8a^3-a^3)+6(4a^2-a^2)-8a(2a-a)$$

$$=\frac{2}{3}a^2$$ …[答]

３．２． の結果と $S(2^n)>7^{10}$ より

$$\frac{2}{3}\cdot 2^{2n}>7^{10}$$

$$2^{2n+1}>3\cdot 7^{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}2^{2n+1}>\log_{10}3\cdot 7^{10}$$

$$(2n+1)\log_{10}2>\log_{10}3+10\log_{10}7$$

$$n>\frac{\log_{10}3+10\log_{10}7-\log_{10}2}{2\log_{10}2}$$

これと題意より

$$n>\frac{0.4771+10\times 0.8451-0.3010}{2\times 0.3010}$$

$$=\frac{8.6271}{0.6020}$$

$$=14.3\cdots\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は

$$n=15$$ …[答]

高松高等予備校

[5]

1．$y=ax^2$ において，$a>0$ より $x^2=\dfrac{y}{a}$ だから

$$V=\pi\int_0^1 x^2 dy$$
$$=\pi\int_0^1 \frac{y}{a}dy$$
$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2a}$$

$\therefore\quad a=\dfrac{\pi}{2V}$ …[答]

2．容器 A において水深が 2 となるときの水の体積を V' とすると

$$V'=\pi\int_0^2 x^2 dy$$
$$=\pi\int_0^2 \frac{y}{a}dy$$
$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$
$$=\frac{2\pi}{a}$$

1．より $a=\dfrac{\pi}{2V}$ だから

$$V'=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2V}}=4V$$

よって，あとコップ B 3 杯分の水を容器 A に注げばよい。 …[答]

高松高等予備校