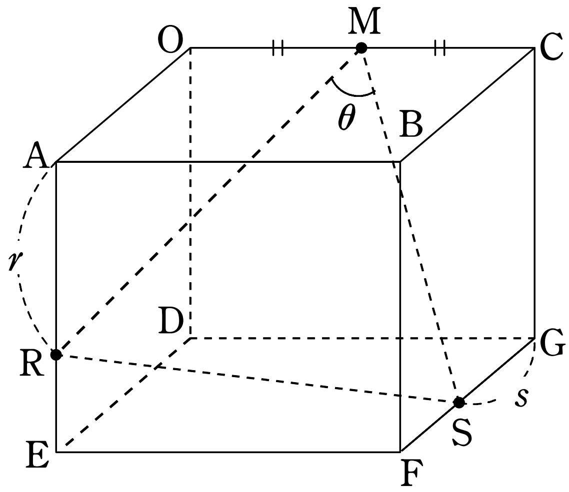
[1]



題意より

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1 \\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \\ 0<r\leqq 1,\ \ 0<s\leqq 1 \end{array}\right\} \quad \cdots(*)$$

1．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$
$$=\vec{a}+r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{GS}}$$
$$=\vec{c}+\vec{d}+s\vec{a}$$
$$=s\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+r\vec{d}$$

…[答]

また

$$\overrightarrow{\mathrm{MS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=s\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$$

…[答]

2.　$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}||\overrightarrow{\mathrm{MS}}|}$$

$$=\frac{s-\frac{1}{4}+r}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+r^2}\sqrt{s^2+\frac{1}{4}+1}}\quad(\because\ (*)\text{より})$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{4s+4r-1}{\sqrt{5+4r^2}\sqrt{5+4s^2}}$$ …[答]

3. $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|^2$ である。これと (*) より

$$1+\frac{1}{4}+r^2=s^2+\frac{1}{4}+1$$

$$\therefore\quad r=s\quad\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{RMS}=90^\circ$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}=0$$

これと (*) より

$$s-\frac{1}{4}+r=0$$

$$\therefore\quad s+r=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots②$$

①，②を解くと

$$r=\frac{1}{8},\quad s=\frac{1}{8}$$ …[答]

4.　$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}=-\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-r\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=(s-1)\vec{a}+\vec{c}+(1-r)\vec{d}\quad(\because\ 1.\ \text{より})$$

であり，(*) より

$$\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-s)+\frac{1}{2}+(r^2-r)$$

$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+(1-s)>0\quad(\because\ (*)\text{より})$$

したがって

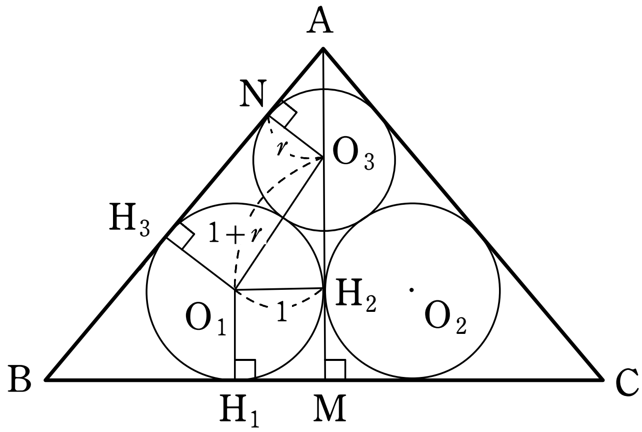
$$\cos\angle \mathrm{MRS} > 0$$

ゆえに $\angle \mathrm{MRS}$ はつねに鋭角である。 [証明終]

高松高等予備校

[2]

1．



AB＝AC であり，点 M は線分 BC の中点であるから

$\angle AMB = 90^\circ$

よって，AB＝5，BM＝3 から AM＝4　…[答]

2．O_1 から線分 BM，線分 AM，線分 AB に引いた垂線との交点をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とする。

$AH_3 = AH_2 = AM - H_2M = 4 - R$

$BH_3 = BH_1 = BM - H_1M = 3 - R$

$AB = AH_3 + BH_3$ であるから

$5 = (4-R) + (3-R)$　すなわち　$5 = 7 - 2R$

したがって　$2R = 2$　となるから　$R = 1$　…[答]

3．O_3 から辺 AB に引いた垂線との交点を N とする。

$O_1O_3 = 1 + r$　より　$O_3H_2 = \sqrt{(1+r)^2 - 1^2} = \sqrt{r^2 + 2r}$

よって　$AO_3 = AH_2 - O_3H_2 = 3 - \sqrt{r^2 + 2r}$

$\triangle AO_3N$ において $\angle O_3NA = 90^\circ$ であることから $\dfrac{r}{AO_3} = \sin\angle O_3AN$

ところで　$\triangle ABM$ において $\angle AMB = 90^\circ$ であるから $\sin\angle BAM = \dfrac{3}{5}$

$\sin\angle O_3AN = \sin\angle BAM$ より

$\dfrac{r}{AO_3} = \dfrac{3}{5}$

$5r = 3AO_3$

$$5r=9-3\sqrt{r^2+2r}$$

$$3\sqrt{r^2+2r}=9-5r \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $9-5r>0$ として ① の両辺を 2 乗して整理すると

$$16r^2-108r+81=0$$

$$r=\frac{54\pm\sqrt{54^2-16\cdot 81}}{16}=\frac{27\pm 9\sqrt{5}}{8}$$

$0<r<\frac{9}{5}$ であることから $r=\frac{27-9\sqrt{5}}{8}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．$y=ax^2$ において，$a>0$ より $x^2=\dfrac{y}{a}$ だから

$$V=\pi\int_0^1 x^2dy$$
$$=\pi\int_0^1 \frac{y}{a}dy$$
$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2a}$$

$\therefore\quad a=\dfrac{\pi}{2V}$ …[答]

2．容器 A において水深が 2 となるときの水の体積をV' とすると

$$V'=\pi\int_0^2 x^2dy$$
$$=\pi\int_0^2 \frac{y}{a}dy$$
$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$
$$=\frac{2\pi}{a}$$

1． より $a=\dfrac{\pi}{2V}$ だから

$$V'=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2V}}=4V$$

よって，あとコップ B 3 杯分の水を容器 A に注げばよい。 …[答]

高松高等予備校

[4A]

1．絶対値は　$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

偏角 θ は　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ …[答]

2．点 A を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$(1+\sqrt{3}\,i)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=(1+\sqrt{3}\,i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2$$

…[答]

3．点 B(z) は虚軸上にあるので $z=bi$ (b は実数)とおける。

$OB^2=b^2$

$AB^2=|bi-(1+\sqrt{3}\,i)|^2=|-1+(b-\sqrt{3})i|^2=(-1)^2+(b-\sqrt{3})^2$

$=b^2-2\sqrt{3}\,b+4$

OB＝AB であるから $OB^2=AB^2$

よって　$b^2=b^2-2\sqrt{3}\,b+4$

これを解いて　$b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ゆえに，点 B を表す複素数 z は　$z=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,i$ …[答]

4．3 点 O，A，B を通る円の中心を C とすると

右図より，OB＝AB，１．の θ が $\dfrac{\pi}{3}$ だから

$\angle OAB=\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

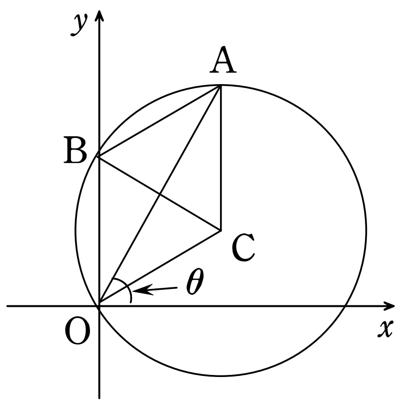
また　CO＝CB，$\angle OCB=2\angle OAB=\dfrac{\pi}{3}$ である

から，△OCBは正三角形である。

よって，円の中心 C は，点 B を原点のまわりに

$-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。したがって

図



$$\frac{2}{\sqrt{3}}i\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{2}{\sqrt{3}}i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{3}}i \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校

[4B]

1．　$A^2=AA$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ …[答]

2．　$X=aA+bE$

$$=\begin{pmatrix}b & -a\\ a & b\end{pmatrix}$$

$\varDelta=b^2+a^2\neq 0$ より

$$X^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}b & a\\ -a & b\end{pmatrix}$$ …[答]

3．　$(aB+bE)(-aB+bE)=sB+tE$

$-a^2B^2+abB-abB+b^2E=sB+tE$

$B^2=-E$ より

$sB=(a^2+b^2-t)E$

[i]　$s=0$ のとき

$a^2+b^2-t=0$

ゆえに

$t=a^2+b^2$

[ii]　$s\neq 0$ のとき

$$B=\frac{a^2+b^2-t}{s}E$$

ここで，$\dfrac{a^2+b^2-t}{s}=k$ とおくと

$B=kE$

$B^2=k^2E$

$B^2=-E$ より

$-E=k^2E$

ゆえに

$k^2=-1$

ここでa，b，s，tは実数よりkは実数

したがって，$k^2=-1$を満たすkは存在しない

[i]，[ii]より

$$s=0\ ,\ \ t=a^2+b^2 \qquad \cdots[答]$$

4．３．より

$$(aB+bE)(-aB+bE)=(a^2+b^2)E$$

$a^2+b^2\fallingdotseq 0$ より

$$(aB+bE)\left(-\frac{a}{a^2+b^2}B+\frac{b}{a^2+b^2}E\right)=E$$

また

$$\left(-\frac{a}{a^2+b^2}B+\frac{b}{a^2+b^2}E\right)(aB+bE)$$

$$=-\frac{a^2}{a^2+b^2}B^2-\frac{ab}{a^2+b^2}B+\frac{ab}{a^2+b^2}B+\frac{b^2}{a^2+b^2}E$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}E+\frac{b^2}{a^2+b^2}E \quad (\because B^2=-E\ )$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}E$$

$$=E$$

よって$Y=aB+bE$の逆行列Y^{-1}は

$$Y^{-1}=-\frac{a}{a^2+b^2}B+\frac{b}{a^2+b^2}E$$

$Y^{-1}=pB+qE$で，３．よりBはEの定数倍ではないので

$$p=-\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \ q=\frac{b}{a^2+b^2} \qquad \cdots[答]$$