数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

1

(1)　1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意したのであるから，用意したカード全部の枚数は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)\ (\text{枚})$$

…[答]

(2)　$N = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ とおく。2 枚のカードの引き方は全部で ${}_N\mathrm{C}_2$ 通り。

(i)　$2 \leqq k \leqq n$ のとき

引いたカード 2 枚の番号が両方とも k であるような引き方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_2}{{}_N\mathrm{C}_2} = \frac{\dfrac{k(k-1)}{2}}{\dfrac{N(N-1)}{2}} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

$$= \frac{k(k-1)}{\dfrac{1}{2}n(n+1)\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)-1\right\}}$$

$$= \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

(ii)　$k=1$ のとき

引いたカード 2 枚の番号が両方とも 1 であるような引き方は 0 通りであるから，求める確率は 0

(i), (ii) より，求める確率は

$$\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

…[答]

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率は，(2) より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$\times\frac{1}{3}\{(1\cdot2\cdot3-0)+(2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3)+(3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4)$$

$$+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\ \}$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\times\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$=\frac{4}{3(n+2)}$$ …[答]

(4)　引いたカード 2 枚の番号が連続するのは，1 から $n-1$ までの自然数に対して，番号 k をつけたカードを 1 枚と番号 $k+1$ をつけたカードを 1 枚引く場合であるから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_k\mathrm{C}_1\times{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k(k+1)}{N(N-1)}$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$$

$$=\frac{8}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{l=1}^{n}l(l-1)$$

$$=\frac{8}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\times\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$=\frac{8}{3(n+2)}$$ …[答]

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

2

(1) $\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$

とする。

$$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z)$$

$$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=(x,\ y-1,\ z)+(x,\ y,\ z-1)$$
$$=(2x,\ 2y-1,\ 2z-1)$$

$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}\right)=0$ から

$$(x-1)\cdot 2x+y(2y-1)+z(2z-1)=0$$

$$(2x^2-2x)+(2y^2-y)+(2z^2-z)=0$$

$$x^2-x+y^2-\frac{y}{2}+z^2-\frac{z}{2}=0$$

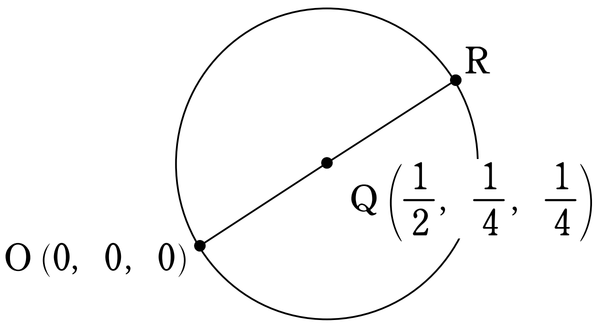
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 \quad \cdots①$$

よって，集合 S は球面である。 [終]

このとき中心 Q と半径 r は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \ r=\frac{\sqrt{6}}{4}$$ …[答]

(2)



S は原点を通る球面であるから求める点を R とすると

$$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}$$
$$=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって

$$\mathrm{R}\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$ …[答]

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおく。

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

より

$$-a+b=0,\quad -a+c=0$$

$a=1$ とすると，$b=1$，$c=1$ なので

$$\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$$

平面 α 上の点を $\mathrm{K}\,(X,\ Y,\ Z)$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$1\cdot(X-1)+1\cdot Y+1\cdot Z=0$$

ゆえに

$$X+Y+Z=1$$

点 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ は上式を満たすから点 Q は平面 α 上にある。　[終]

別解

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s，t が存在するとき，点 Q は平面 α 上にある。

$$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)=s(-1,\ 1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 1)$$
$$=(-s-t,\ s,\ t)$$

$s=t=\frac{1}{4}$ のとき上式は成り立つので点 Q は平面 α 上にある。　[終]

(4)　$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ を通り，平面 α に垂直な直線 ℓ 上の点を T とすると，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}}=k\vec{n}$$

とおける。すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+k(1,\ 1,\ 1)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+k,\ \frac{1}{4}+k,\ \frac{1}{4}+k\right)$$

よって

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{2}+k,\ \frac{1}{4}+k,\ \frac{1}{4}+k\right)$$

とできる。球面 S との共有点は $x=\frac{1}{2}+k$，$y=\frac{1}{4}+k$，$z=\frac{1}{4}+k$ を

①に代入して

$$k^2+k^2+k^2=\frac{3}{8}$$

$$k^2=\frac{1}{8}$$

すなわち

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

したがって

$$\mathrm{T}\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)\quad(\text{複号同順})\qquad\cdots[\text{答}]$$

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

3

$$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)=x^{n+1}-x^{n+2}$$

(1) $$f_n{}'(x)=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$$
$$=x^n\{n+1-(n+2)x\}$$

$p=a_n$ として 点 $(p,\ f(p))$ における接線の方程式は

$$y-p^{n+1}(1-p)=p^n\{(n+1)-(n+2)p\}(x-p)$$

これが原点を通るので，$x=y=0$ を代入して

$$-p^{n+1}(1-p)=-p^{n+1}\{(n+1)-(n+2)p\}$$

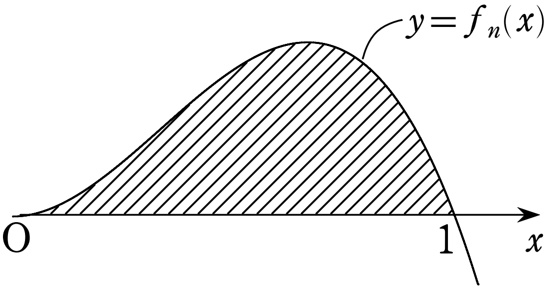
$p^{n+1}\neq 0$ であるから両辺を $-p^{n+1}$ で割ると

$$1-p=(n+1)-(n+2)p$$
$$(n+1)p=n$$
$$p=\frac{n}{n+1}$$

ゆえに

$$a_n=\frac{n}{n+1}$$ …[答]

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $f_n(x)\geqq 0$ より下図の斜線部分の面積が B_n であるから

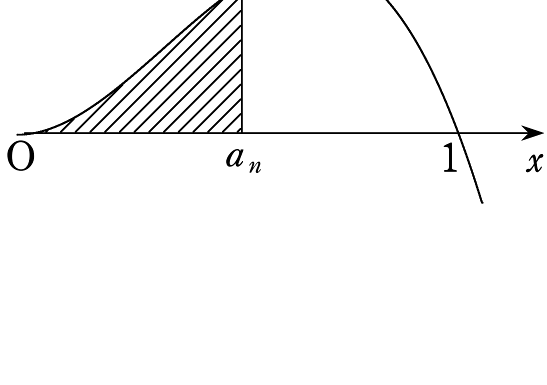


$$B_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^{n+2})dx$$
$$=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$ …[答]

(1) より $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

$0<a_n=\dfrac{n}{n+1}<1$ であり，

$f_n(x)\geqq 0$ より右図の斜線部分の面積が C_n であるから



$$C_n=\int_0^{\frac{n}{n+1}}(x^{n+1}-x^{n+2})dx$$

$$=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}-\frac{1}{n+3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}\left\{\frac{1}{n+2}-\frac{n}{(n+1)(n+3)}\right\}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

…[答]

(3)　(2) より

$$\frac{C_n}{B_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\frac{2n+3}{n+1}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}\cdot\frac{2n+3}{n+1}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

したがって

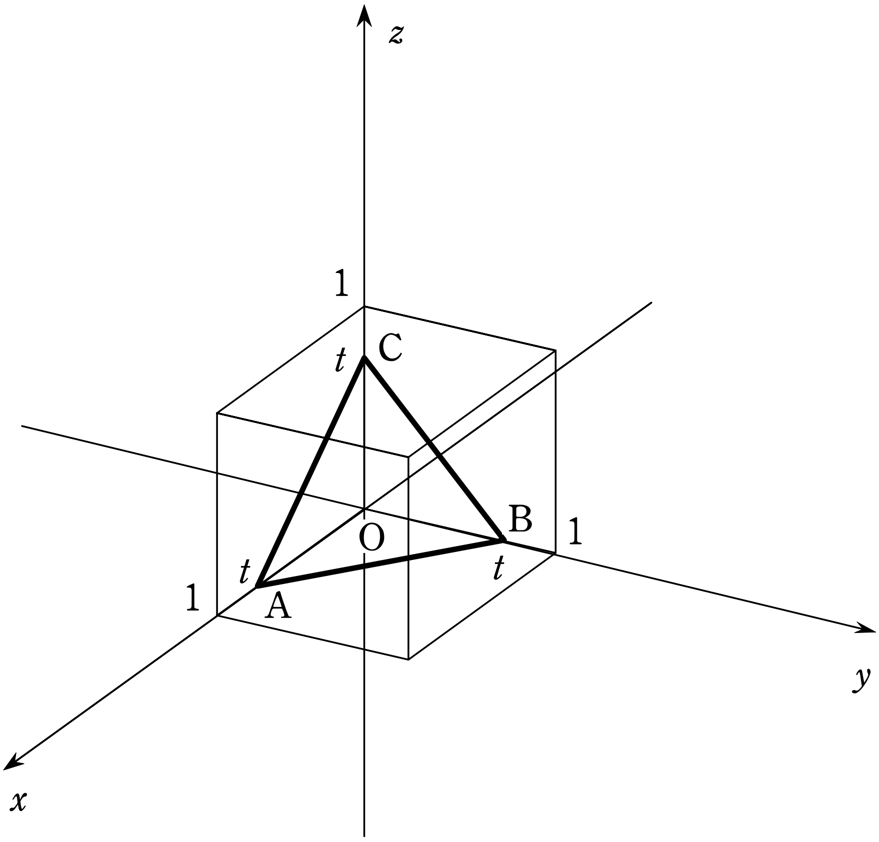
$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\frac{2}{e}$$

…[答]

4

(1)　A$(t, 0, 0)$，B$(0, t, 0)$，C$(0, 0, t)$とする。

(i)　$0 < t \leqq 1$ のとき

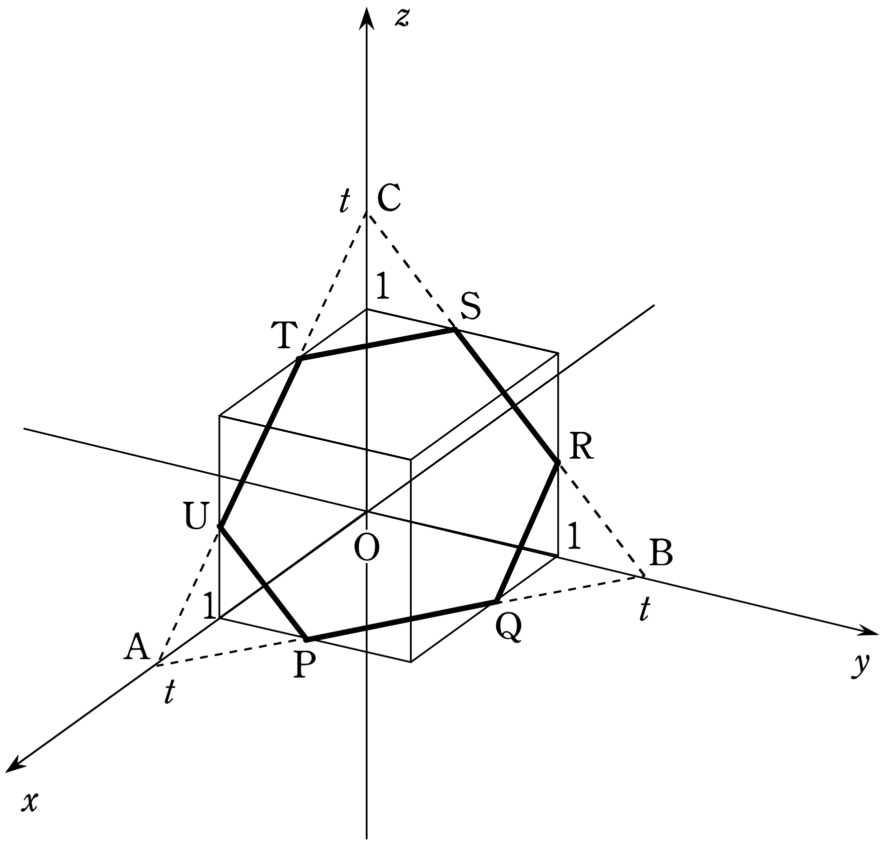


立方体を切った切り口は，1 辺の長さが $\sqrt{2}\,t$ の正三角形 ABC であるから

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}\,t)^2\cdot\sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

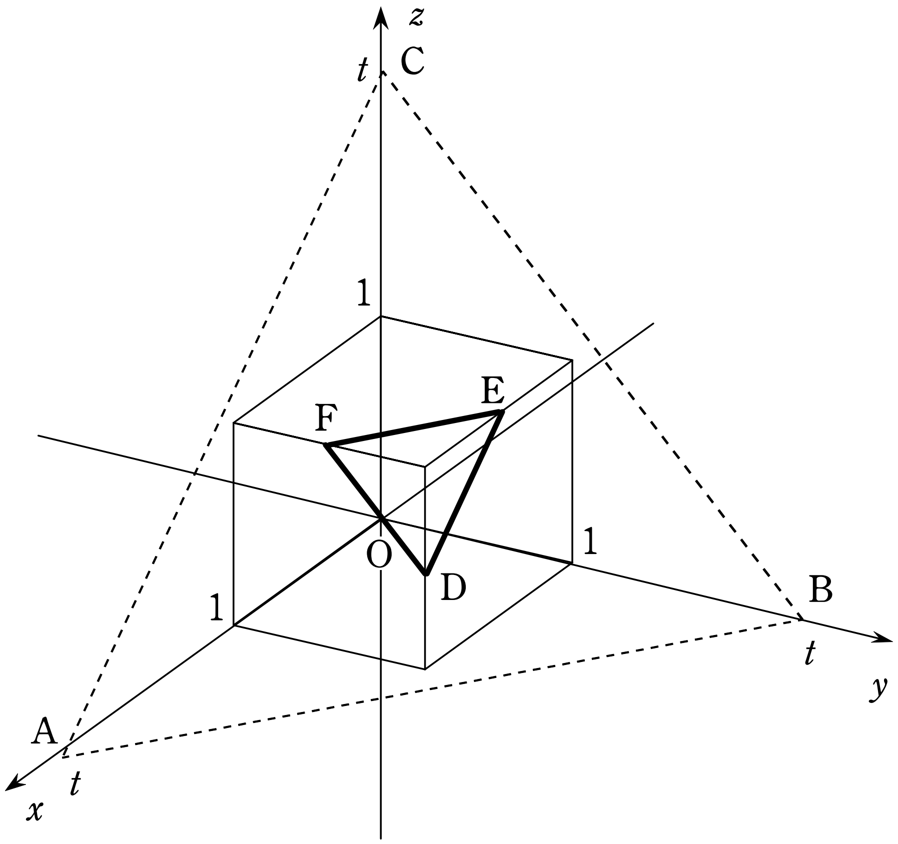
(ii)　$1 \leqq t \leqq 2$ のとき



$\mathrm{P}(1,\ t-1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 1,\ t-1)$，$\mathrm{S}(0,\ t-1,\ 1)$，$\mathrm{T}(t-1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{U}(1,\ 0,\ t-1)$ とすると，立方体を切った切り口は六角形 PQRSTU であり，$\triangle\mathrm{APU}$，$\triangle\mathrm{BRQ}$，$\triangle\mathrm{CTS}$ はすべて合同な1辺の長さが $\sqrt{2}(t-1)$ の正三角形であることから

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \triangle\mathrm{ABC} - 3\triangle\mathrm{APU} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}\,t)^2\cdot\sin 60^\circ - 3\times\frac{1}{2}\cdot\{\sqrt{2}(t-1)\}^2\cdot\sin 60^\circ \\
&= -\sqrt{3}\,t^2 + 3\sqrt{3}\,t - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
&= -\sqrt{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

(iii)　$2 \leqq t < 3$ のとき



$D(1,1,t-2)$，$E(t-2,1,1)$，$F(1,t-2,1)$ とすると，点 $(1,1,1)$ と点 D，E，F の距離はすべて

$$1-(t-2)=3-t$$

である。したがって，立方体を切った切り口は，1 辺の長さが $\sqrt{2}(3-t)$ の正三角形 DEF であるから

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\{\sqrt{2}(3-t)\}^2\cdot\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2$$

(i)，(ii)，(iii) と $f(0)=f(3)=0$ より

$$\left.\begin{array}{ll}0 \leqq t \leqq 1 \text{ のとき} & f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ 1 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき} & f(t)=-\sqrt{3}\,t^2+3\sqrt{3}\,t-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2 \leqq t \leqq 3 \text{ のとき} & f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2\end{array}\right\}$$

…[答]

(2)　(1) の結果から，$f(t)$ のとりうる値の範囲は

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　$0 \leqq f(t) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq f(t) \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$2 \leqq t \leqq 3$ のとき　$0 \leqq f(t) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 3$ における最大値は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　…[答]

(3)　(1) より

$$\int_0^3 f(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}t^2dt+\int_1^2\left(-\sqrt{3}\,t^2+3\sqrt{3}\,t-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)dt+\int_2^3\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}t^3+\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right]_1^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{(t-3)^3}{3}\right]_2^3$$

$=\sqrt{3}$　…[答]