数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

1

(1)　1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意したのであるから，用意したカード全部の枚数は

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)\ (\text{枚})$$ …[答]

(2)　$N=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ とおく。2 枚のカードの引き方は全部で ${}_N\mathrm{C}_2$ 通り。

(i)　$2\leqq k\leqq n$ のとき

引いたカード 2 枚の番号が両方とも k であるような引き方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_2}{{}_N\mathrm{C}_2}=\frac{\dfrac{k(k-1)}{2}}{\dfrac{N(N-1)}{2}}=\frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

$$=\frac{k(k-1)}{\dfrac{1}{2}n(n+1)\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)-1\right\}}$$

$$=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

(ii)　$k=1$ のとき

引いたカード 2 枚の番号が両方とも 1 であるような引き方は 0 通りであるから，求める確率は 0

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$ …[答]

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率は，(2) より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\times\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)-3\}$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\times\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

$$=\frac{4}{3(n+2)}$$ …[答]

(4)　引いたカード 2 枚の番号が異なっている事象は，引いたカード 2 枚の番号が一致する事象の余事象であるから

$$p_n=1-\frac{4}{3(n+2)}$$

$p_n\geqq 0.9$ より

$$1-\frac{4}{3(n+2)}\geqq 0.9$$

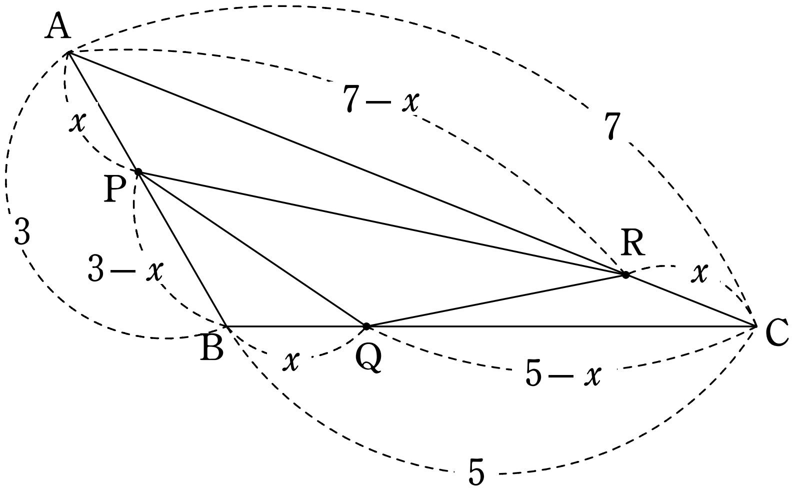
整理すると

$$n\geqq\frac{34}{3}=11+\frac{1}{3}$$

よって，求める最小の自然数 n の値は

$$n=12$$ …[答]

2



(1)　余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\angle ABC<180^\circ$ より　$\angle ABC=120^\circ$　…[答]

(2)　三角形 BPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot BQ\cdot BP\cdot\sin\angle PBQ=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3-x)\cdot\sin120^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)$$
…[答]

(3)　三角形 PQR の面積をT，三角形 ABC の面積をS，三角形 APR の面積をS_1，三角形 BPQ の面積をS_2，三角形 CQR の面積をS_3とおくと

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1=\frac{x}{3}\cdot\frac{7-x}{7}S=\frac{5\sqrt{3}}{28}x(7-x)$$

(2) より

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)$$

$$S_3=\frac{x}{7}\cdot\frac{5-x}{5}S=\frac{3\sqrt{3}}{28}x(5-x)$$

よって

$$\begin{aligned}T&=S-(S_1+S_2+S_3)\\&=\frac{15\sqrt{3}}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{28}x(7-x)-\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)-\frac{3\sqrt{3}}{28}x(5-x)\\&=\frac{\sqrt{3}}{28}(15x^2-71x+105)\\&=\frac{\sqrt{3}}{28}\left\{15\left(x-\frac{71}{30}\right)^2+\frac{1259}{60}\right\}\end{aligned}$$

$0<x<3$ より，三角形 PQR の面積 T が最小となるときの x の値は

$$x=\frac{71}{30}$$ …[答]

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

3

(1)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ であるから

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$$b_{n+1}=3b_n+1$$ …[答]

(2)　$b_{n+1}=3b_n+1$ を変形して

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{b_n+\frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $b_1+\frac{1}{2}=a_2-a_1+\frac{1}{2}=2-1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{3^n-1}{2}$$ …[答]

(3)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3^k-1}{2}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\cdot 3^{k-1}-\frac{1}{2}\right)\\&=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-\frac{1}{2}(n-1)\\&=\frac{1}{4}(3^n-2n+3)\end{aligned}$$

$a_1=1$ であるから，$a_n=\frac{1}{4}(3^n-2n+3)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{1}{4}(3^n-2n+3)$$ …[答]

4

(1)　題意より $k<0$ なる実数の定数 k が存在して

$$f(x)=kx(x-a)$$

と表される。

$$f(x)=kx^2-akx$$

$$f'(x)=2kx-ak$$

ここで，$kx(x-a)=x^2$ を解くと

$$x\{(k-1)x-ak\}=0$$

$k<0$ より，$k-1\neq 0$ であるから

$$x=0,\ \frac{ak}{k-1}$$

$k<0$，$0<a<1$ より $\dfrac{ak}{k-1}\neq 0$ であるから，題意より，点 P の x 座標は $\dfrac{ak}{k-1}$ である。

$g(x)=x^2$ とおくと，$g'(x)=2x$ であるから

$$m=g'\left(\frac{ak}{k-1}\right)=\frac{2ak}{k-1}$$

また

$$n=f'\left(\frac{ak}{k-1}\right)=\frac{2ak^2}{k-1}-ak=\frac{ak(k+1)}{k-1}$$

したがって，$(2a-1)m=2an$ より

$$\frac{2ak(2a-1)}{k-1}=\frac{2a^2k(k+1)}{k-1}$$

$k<0$，$0<a<1$ より $\dfrac{2ak}{k-1}\neq 0$ であるから

$$2a-1=a(k+1)$$

$$\therefore\quad k=\frac{a-1}{a}$$

よって

$$f(x)=\frac{a-1}{a}x(x-a)$$ …[答]

(2)　$0<a<1$ より，$0\leqq x\leqq a$ の範囲では $f(x)=\dfrac{a-1}{a}x(x-a)\geqq 0$ であるから

$$S(a)=\frac{a-1}{a}\int_0^a x(x-a)\,dx$$

$$=\frac{a-1}{a}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a^2 \qquad \cdots[答]$$

(3) $S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a=-\frac{1}{2}a\left(a-\frac{2}{3}\right)$

$0<a<1$ より，$S'(a)=0$ とすると，$a=\frac{2}{3}$

したがって，$S(a)$ の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

$S(a)=\frac{1}{6}a^2(1-a)$ であるから，$S(a)$ の $0<a<1$ における最大値は

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{81} \qquad \cdots[答]$$