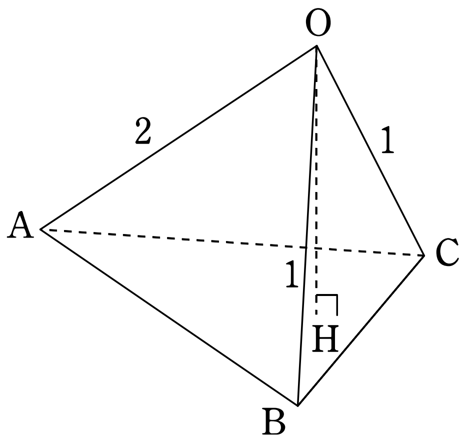
数学　２０２　その１



(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos60^\circ=1$　…[答]

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$BC=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ より

$1-2\vec{b}\cdot\vec{c}+1=\dfrac{10}{4}$

$\therefore$　$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{4}$　…[答]

(2)　辺BCの中点と，O，Aを通る平面に関する対称性より

$\overrightarrow{OH}=(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}+t\vec{c}$

とおける。

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$\{(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-2t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}-(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ と(1)より

$t=\dfrac{12}{19}$

$\therefore$　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{5}{19}\vec{a}+\dfrac{12}{19}\vec{b}+\dfrac{12}{19}\vec{c}$　…[答]

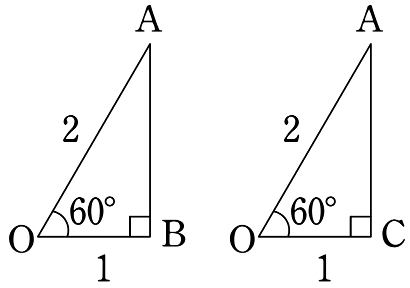
(3)　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{19}(-5\vec{a}+12\vec{b}+12\vec{c})$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\frac{1}{19}\left|-5\vec{a}+12\vec{b}+12\vec{c}\right|$$

ここで

$$\begin{aligned}&\left|-5\vec{a}+12\vec{b}+12\vec{c}\right|^2\\&\quad=25\left|\vec{a}\right|^2+144\left|\vec{b}\right|^2+144\left|\vec{c}\right|^2-120\vec{a}\cdot\vec{b}-120\vec{c}\cdot\vec{a}+288\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\quad=76\end{aligned}$$



$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\frac{2}{19}\sqrt{19}$$

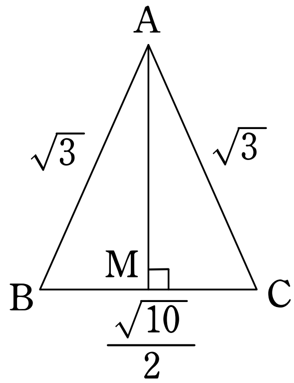
図より

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{3}$$

BCの中点をMとおくと

$$\mathrm{AM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{38}}{4}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{38}}{4}=\frac{\sqrt{95}}{8}$$



したがって，体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC})\cdot\mathrm{OH}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{95}}{8}\cdot\frac{2}{19}\sqrt{19}\\&=\frac{\sqrt{5}}{12}\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

数学　２０２　その２

(1)　$\displaystyle\int\{ax-x\log(x+1)\}dx$

$\displaystyle=\int\{ax-(x+1)\log(x+1)+\log(x+1)\}dx$

$\displaystyle=\frac{a}{2}x^2-\left\{\frac{(x+1)^2}{2}\log(x+1)-\int\frac{(x+1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx\right\}$

$+(x+1)\log(x+1)-x+C$　(C は積分定数)

$\displaystyle=\frac{2a+1}{4}x^2-\frac{x}{2}-\frac{x^2-1}{2}\log(x+1)+C$　…[答]

(2)　$ax-x\log(x+1)=0$　…①

より

$x\{a-\log(x+1)\}=0$

$a-\log(x+1)=0$ のとき

$\log(x+1)=a$

$x=e^a-1$

$a>0$ より $e^a-1>0$ である。

ゆえに，①を満たす x は

$x=0，e^a-1$　…[答]

(3)　(2) より

$-1\leqq x\leqq 0$，$e^a-1\leqq x$ のとき　$ax-x\log(x+1)\leqq 0$

$0\leqq x\leqq e^a-1$ のとき　$ax-x\log(x+1)\geqq 0$

また

$\displaystyle F(x)=\int\{ax-x\log(x+1)\}dx$

とする。

(i)　$0<e^a-1<1$ すなわち $0<a<\log 2$ のとき

$\displaystyle I=\int_0^{e^a-1}\{ax-x\log(x+1)\}dx+\int_{e^a-1}^{1}-\{ax-x\log(x+1)\}dx$

$\displaystyle=\Big[F(x)\Big]_0^{e^a-1}-\Big[F(x)\Big]_{e^a-1}^{1}$

$\displaystyle=\frac{e^{2a}}{2}-2e^a+\frac{a}{2}+\frac{7}{4}$

(ii)　$1\leqq e^a-1$ すなわち $a\geqq\log 2$ のとき

$$I=\int_0^1\{ax-x\log(x+1)\}dx$$
$$=\Big[F(x)\Big]_0^1$$
$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$$

(i)，(ii) より

$0<a<\log 2$ のとき　$I=\dfrac{e^{2a}}{2}-2e^a+\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$

$a\geqq\log 2$　　のとき　$I=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}$　　…[答]

(4)　(3) より

(i)　$0<a<\log 2$ のとき

$$\frac{dI}{da}=e^{2a}-2e^a+\frac{1}{2}$$

$\dfrac{dI}{da}=0$ とすると

$$2e^{2a}-4e^a+1=0$$
$$e^a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$
$$a=\log\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$0<a<\log 2$ より

$$a=\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$a\geqq\log 2$ のとき

$$\frac{dI}{da}=\frac{1}{2}$$

(i)，(ii) より，I の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\log\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
I'		$-$	0	$+$		$+$
I		$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$

以上より，I を最小にする a の値は

$$a = \log \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$ …[答]

高松高等予備校

数学　２０２　その３

(1)　　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+cn-4}{3n}$

より

$$a_2=\frac{{a_1}^2+c-4}{3}$$

$$=\frac{1+c-4}{3}$$

$$=\frac{c-3}{3}$$ …[答]

$$a_3=\frac{{a_2}^2+2c-4}{6}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{c-3}{3}\right)^2+2c-4}{6}$$

$$=\frac{(c^2-6c+9)+(18c-36)}{54}$$

$$=\frac{c^2+12c-27}{54}$$ …[答]

(2)　　$a_1+a_3\leqq 2a_2$

のとき

$$1+\frac{c^2+12c-27}{54}\leqq\frac{2}{3}(c-3)$$

展開して整理すると

$$c^2-24c+135\leqq 0$$

$$(c-9)(c-15)\leqq 0$$

したがって

$9\leqq c\leqq 15$　…①

$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ において

命題「$a_n\geqq 3$」　　…②

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=3$ のとき

$$a_3=\frac{1}{54}\{(c+6)^2-63\}$$

①のとき

$$a_3 \geqq \frac{1}{54}\{(9+6)^2-63\}=3$$

となり②は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき②が成り立つ，すなわち $k \geqq 3$ において $a_k \geqq 3$ とすると

$$a_{k+1}-3 \geqq \frac{a_k{}^2+ck-4}{3k}-3=\frac{a_k{}^2+(c-9)k-4}{3k}$$

$a_k{}^2 \geqq 9$ であるから

$$\begin{aligned} a_{k+1}-3 &\geqq \frac{9+(c-9)k-4}{3k} \\ &= \frac{(c-9)k+5}{3k} \\ &= \frac{c-9}{3}+\frac{5}{3k} \\ &> \frac{c-9}{3} \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって，$a_{k+1}>3$ となり $n=k+1$ のときも②は成り立つ。

[1]，[2] より $n \geqq 3$ のとき $a_n \geqq 3$ である。

[終]

(3)　　$a_1+a_3=2a_2$

のとき (2) から

$c=9$ または $c=15$

(i)　$c=9$ のとき

$$a_{n+1}=\frac{a_n{}^2-4}{3n}+3$$

$$a_{n+1}-3=\frac{a_n{}^2-4}{3n}$$

であり

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=\frac{32}{9}$$

である。ここで，$n \geqq 4$ のとき

命題「$a_n<4$」　…③

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=4$ のとき

$a_4=\dfrac{32}{9}<\dfrac{36}{9}=4$ より③は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき③が成り立つ，すなわち $k\geqq 4$ において $a_k<4$ とすると

$$4-a_{k+1}=1-\frac{a_k{}^2-4}{3k}$$
$$>1-\frac{4^2-4}{3k}$$
$$=1-\frac{4}{k}$$
$$\geqq 1-\frac{4}{4}=0$$

よって $a_{k+1}<4$ となり③は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より $n\geqq 4$ のとき③が成り立つ。

(2) と合わせて $n\geqq 4$ において

$$3\leqq a_n<4$$

このとき

$$5\leqq a_n{}^2-4<12$$

から

$$\frac{5}{3n}\leqq\frac{a_n{}^2-4}{3n}<\frac{12}{3n}=\frac{4}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{3n}\leqq a_{n+1}-3<\frac{4}{n}$$

十分大きな n について

$$\frac{5}{3(n-1)}\leqq a_n-3<\frac{4}{n-1}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3(n-1)}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n-1}=0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

(ii)　$c=15$ のとき

$$a_{n+1}=\frac{a_n{}^2+15n-4}{3n}$$

であり

$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=10$

から

$a_n=3n-2$　…④

と推定される。すべての自然数 n に対して④が成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=1$ となり④は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき④が成り立つ，すなわち，$a_k=3k-2$ とすると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{{a_k}^2+15k-4}{3k} \\ &= \frac{(3k-2)^2+15k-4}{3k} \\ &= \frac{9k^2+3k}{3k} \\ &= 3k+1 \\ &= 3(k+1)-2 \end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも④は成り立つ。

[1]，[2] よりすべての自然数 n に対して④が成り立つ。

よって，$c=15$ のとき

$a_n=3n-2$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

(i)，(ii) より

$$\begin{cases} c=9 \text{ のとき} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n=3 \\ c=15 \text{ のとき} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \end{cases}$$ …[答]

高松高等予備校

(1)　3，6，9 番の玉の集合をP，1，4，7，10 番の玉の集合をQ，2，5，8 番の玉の集合を R とする。

箱 A には P の 3 つの玉を入れ，箱 B には Q と 2，8 番の 6 つの玉から 3 つを選んで入れ，残りの 3 つの玉を箱 C に入れればよい。

$\therefore\ {}_6C_3=20$ (通り)　…[答]

(2)　1，4，7 番の玉の集合を Q' とする。次の場合がある。

(i)　P，Q'，R から 1 つ選んでその 3 個を箱 A に入れ，10 番を除く残りの 6 つから 3 つ選んで箱 B に入れ，残りの 3 個を箱 C に入れればよい。

$\therefore\ 3\times{}_6C_3=60$ (通り)

(ii)　P，Q'，R から 1 つずつ玉を選んで箱 A に入れ，10 番を除く 6 つを箱 B，箱 C に 3 個ずつ入れる。

$\therefore\ 3^3\times{}_6C_3=27\times20=540$ (通り)

(i)，(ii) より　$60+540=600$ (通り)　…[答]

(3)　$1+2+\cdots\cdots+10=55=3\times18+1$ であるから，箱 A，箱 B，箱 C の 9 つの玉の番号の和が 3 の倍数のとき，a は Q の玉である。ゆえに，$a=1$，4，7，10 の 4 通りある。このとき Q から a を除いた集合を Q'' とする。

(i)　箱 A，箱 B，箱 C の玉が P，Q''，R のいずれかであるとき，3 つを並べかえて

$3!=6$ (通り)

(ii)　箱 A，箱 B，箱 C とも 3 つの玉の番号を 3 で割った余りが異なる。

まず箱 A に P，Q''，R から 1 つずつ選んで入れる。これは 3^3 通りある。次に，P，Q''，R それぞれ残り 2 個の中から 1 つずつ選んで箱 B に入れる。これは 2^3 通りある。残りの 3 個を箱 C に入れる。

$\therefore\ 3^3\times2^3=216$ (通り)

以上より

$4\times(6+216)=888$ (通り)　…[答]