数学　２０３　その１

(1)　A$(x,\ y)$ とおくと

$$x=1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$y=1\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad A\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ …[答]

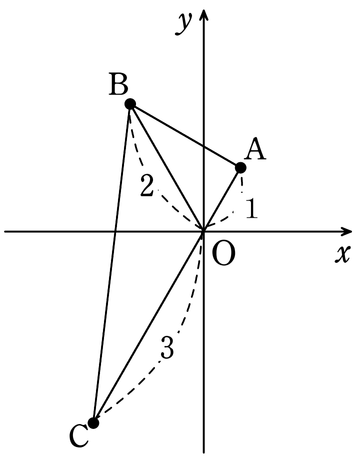
(2)　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $OB=2OA$ より

$$\angle OAB=\frac{\pi}{2}$$ …[答]

(3)　$OB=2$，$OC=3$，$\angle BOC=\dfrac{2}{3}\pi$ より

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ …[答]

(4)



$B(-1,\ \sqrt{3})$，$C\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BOC=\dfrac{2}{3}\pi$ より

点 A，O，C は 1 直線上にある。

(2) より $\angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$ より

$\triangle ABC$ の外接円の中心は BC の中点

中心 $\left(-\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ …[答]

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2}$$
$$=\sqrt{16+3}$$
$$=\sqrt{19}$$

半径 $\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ …[答]

高松高等予備校

数学　２０３　その２

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -3,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 1,\ 2)$

から　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{6}$ より $\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:1$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 0,\ 3)$　…[答]

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(a,\ b,\ c)$とすると $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ c-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$より$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$であるから

$$3a-3b+6(c-3)=0 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$より$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$であるから

$$-a+b+2(c-3)=0 \quad \cdots②$$

①，②より　$a=b$，$c=3$　…③

$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=3\sqrt{3}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=27$であるから

$$a^2+b^2+c^2=27$$

③から　$a=b=\pm3$，$c=3$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\pm3,\ \pm3,\ 3)$　(複号同順)　…[答]

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\pm3,\ \pm3,\ 0)$であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{6})^2(\sqrt{6})^2-6^2}$$

$$=6\sqrt{2}$$

CDは平面OABと垂直であるから，求める四面体OABDの体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CD}=\frac{1}{3}\cdot6\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=12 \quad \cdots[答]$$

高松高等予備校

数学　２０３　その３

(1)　　$a\sqrt{x}=x$

$a>0$ より

$x<0$ のとき，解なし

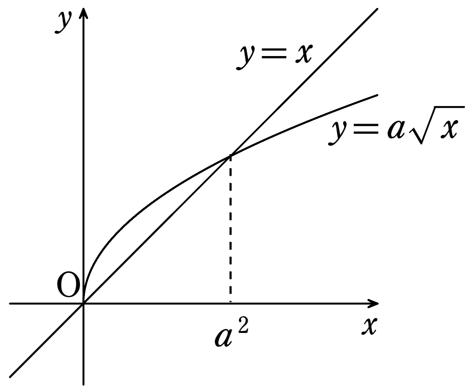
$x\geqq 0$ のとき，両辺を2乗して

$$a^2x=x^2$$

$$x(x-a^2)=0$$

$\therefore$　$x=0,\ a^2$　…[答]

(2)　(i) $a\geqq 1$のとき，$a^2\geqq 1$ より



$$I=\int_0^1(a\sqrt{x}-x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$$

(ii)$0<a<1$ のとき，$0<a^2<1$ より

$$I=\int_0^{a^2}(a\sqrt{x}-x)dx-\int_{a^2}^1(a\sqrt{x}-x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2}-\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{a^2}^1$$

$$=\left(\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{2}a^4\right)-\left\{\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{2}a^4\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}$$

(i)，(ii)より

$$I=\begin{cases}\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2} & (a\geqq 1)\\[2ex] \dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{2} & (0<a<1)\end{cases}$$　…[答]

(3)　$f(a)=\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{2}$ $(0<a<1)$ とおく

$$f'(a)=\frac{4}{3}a^3-\frac{2}{3}$$

$f'(a)=0$ とすると $a^3=\dfrac{1}{2}$ より $a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$a \geqq 1$ のとき(2)の(i)より単調増加より

a	0		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1	
$\dfrac{dI}{da}$		$-$	0	$+$		$+$
I		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき最小であり

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$$

…[答]

(1)　3，6，9 番の玉の集合を P，1，4，7 番の玉の集合を Q，2，5，8 番の玉の集合を R とする。

箱 A には P の 3 つの玉を入れ，箱 B には残りの 6 つの玉から 3 つを選んで入れ，残りの 3 つの玉を箱 C に入れればよい。

$\therefore\ {}_6\mathrm{C}_3=20$ (通り)　…[答]

(2)　箱 A には P，Q，R から 1 つずつ玉を選んで入れ，残りの玉を箱 B，箱 C に 3 つずつ入れればよい。よって

$3^3\times{}_6\mathrm{C}_3=27\times20=540$ (通り)　…[答]

(3)　箱 A の 3 つの玉は 3 で割った余りがすべて等しいか，いずれも異なる場合である。P，Q，R のどれか 1 つを選んで箱 A に入れ，残りの 6 つを箱 B，箱 C に 3 つずつ入れるか，(2) のように入れればよい。

$\therefore\ 3\times{}_6\mathrm{C}_3+540=600$ (通り)　…[答]

(4)　次の場合がある。

(i)　箱 A，箱 B，箱 C の玉が P，Q，R のいずれかであるとき，3 つを並べかえて

$3!=6$ (通り)

(ii)　箱 A，箱 B，箱 C とも 3 つの玉の番号を 3 で割った余りが異なる。

まず箱 A に P，Q，R から 1 つずつ選んで入れ (3^3 通り)，次に箱 B に P，Q，R の残り 2 個ずつの中から 1 つずつ選んで入れ (2^3 通り)，残りを箱 C に入れればよい。

$\therefore\ 3^3\times2^3=216$ (通り)

(i)，(ii) より

$6+216=222$ (通り)　…[答]

高松高等予備校