

[1]

1. 与式より

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 2a_n + b_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \\ &= \frac{5}{2}(a_n + b_n) \\ &= \frac{5}{2}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{5}{2}c_n\end{aligned}$$

…[答]

2. (1)より $\{c_n\}$ は、初項 $c_1 = a_1 + b_1 = 3$ 、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列である。

よって、

$$c_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

…[答]

3. $d_n = a_n - 2b_n$ とおくと、与式より

$$\begin{aligned}d_{n+1} &= a_{n+1} - 2b_{n+1} \\ &= 2a_n + b_n - (a_n + 3b_n) \\ &= a_n - 2b_n \\ &= d_n\end{aligned}$$

よって、 $\{d_n\}$ は定数の数列だから

$$d_n = a_1 - 2b_1 = -3$$

すなわち、 $a_n - 2b_n = -3$ …①

また 2. より、 $a_n + b_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ …②

$\frac{\text{①} + \text{②} \times 2}{3}$ より、 $a_n = 2\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1$ …[答]

① より、 $b_n = \frac{1}{2}(a_n + 3) = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + 1$ …[答]

[2]

1. C_2 は y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線だから

$$y = ax^2$$

とおける。

これが、点 $P(t, -t^2 + 2)$ を通るから

$$-t^2 + 2 = at^2$$

$$t \neq 0 \text{ だから } a = \frac{2-t^2}{t^2}$$

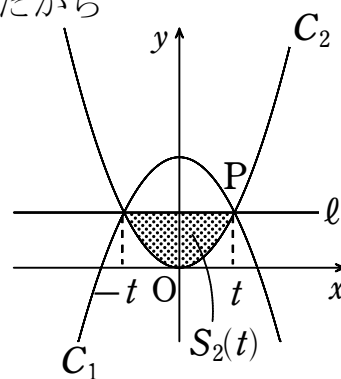
$$\text{よって } y = \frac{2-t^2}{t^2}x^2 \quad \dots[\text{答}]$$

2. 放物線 C_2 と直線 l の交点の x 座標は $x = t, -t$ だから

放物線 C_2 と直線 l で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ は

グラフより

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_{-t}^t \left\{ (-t^2 + 2) - \frac{2-t^2}{t^2}x^2 \right\} dx \\ &= -\frac{2-t^2}{t^2} \int_{-t}^t (x+t)(x-t) dx \\ &= \frac{4}{3}t(2-t^2) \end{aligned}$$



...[答]

$$3. S_2(t) = \frac{4}{3}(2t - t^3)$$

$$S_2'(t) = \frac{4}{3}(2 - 3t^2)$$

$$S_2'(t) = 0 \text{ とすると } 0 < t < \sqrt{2} \text{ より } t = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$S_2(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$...	$\sqrt{2}$
$S_2'(t)$	/	+	0	-	/
$S_2(t)$	/	↗	極大	↘	/

$$\text{よって } t = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ のとき 最大値 } \frac{16}{27}\sqrt{6} \quad \dots[\text{答}]$$

4. 放物線 C_1 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_1(t)$ は
グラフより

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-t}^t \{-x^2 + 2 - (-t^2 + 2)\} dx \\ &= -\int_{-t}^t (x+t)(x-t) dx \\ &= \frac{4}{3}t^3 \end{aligned}$$

$S_1(t) = S_2(t)$ より

$$\frac{4}{3}t^3 = \frac{4}{3}t(2-t^2)$$

$$t^3 = t(2-t^2)$$

$$t(t+1)(t-1) = 0$$

$$0 < t < \sqrt{2} \text{ だから } t = 1$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle BAD = 2$$

…[答]

2. k, m を実数とする。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\ &= \vec{a} + k\vec{b} \end{aligned}$$

とおける。BC ⊥ AP より

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + k\vec{b}) &= 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2 &= 0 \\ 2 + 9k &= 0 \\ k &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$$

…[答]

また、点Qは直線BD上の点より

$$\overrightarrow{AQ} = m\vec{a} + (1-m)\vec{b}$$

とおける。BD ⊥ AQ より

$$\begin{aligned} (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \overrightarrow{AQ} &= 0 \\ (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \{m\vec{a} + (1-m)\vec{b}\} &= 0 \\ -m|\vec{a}|^2 + (2m-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-m)|\vec{b}|^2 &= 0 \\ -4m + 4m - 2 + 9 - 9m &= 0 \\ m &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AQ} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

…[答]

$$\begin{aligned}
3. \quad |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left| \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b} \right|^2 \\
&= |\vec{a}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 \\
&= 4 - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \\
&= \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \dots[\text{答}]$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AQ}|^2 &= \left| \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} \right|^2 \\
&= \frac{49}{81}|\vec{a}|^2 + \frac{28}{81}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 \\
&= \frac{196}{81} + \frac{56}{81} + \frac{36}{81} \\
&= \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AQ}| = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \dots[\text{答}]$$

$$\begin{aligned}
4. \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}|^2 \\
&= \left| -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \right|^2 \\
&= \frac{4}{81}|\vec{a}|^2 - \frac{16}{81}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{81}|\vec{b}|^2 \\
&= \frac{16}{81} - \frac{32}{81} + \frac{144}{81} \\
&= \frac{128}{81}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{8\sqrt{2}}{9} \quad \dots[\text{答}]$$

[4]

1. 放物線の対称性より円の中心を $(0, b)$ とおく。

$$C : y = \frac{1}{2}x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{円} : x^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①より $x^2 = 2y$ を②に代入すると

$$2y + (y - b)^2 = r^2$$

すなわち

$$y^2 - 2(b - 1)y + b^2 - r^2 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

半径 r の円が放物線 C と 2 点で接する条件は y の 2 次方程式③が

$$y = \frac{1}{2}x^2 > 0$$

となる重解をもつことである。③の判別式を D とすると $D = 0$ より

$$\frac{D}{4} = (b - 1)^2 - (b^2 - r^2) = 0$$

すなわち

$$-2b + 1 + r^2 = 0$$

$$\therefore b = \frac{r^2 + 1}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

このとき、重解は

$$y = -\frac{-2(b - 1)}{2 \cdot 1} = b - 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

で $b - 1 > 0$ から $b > 1$ $\dots \textcircled{6}$

④, ⑤より

$$\begin{aligned} y &= \frac{r^2 + 1}{2} - 1 \\ &= \frac{r^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

④, ⑥より

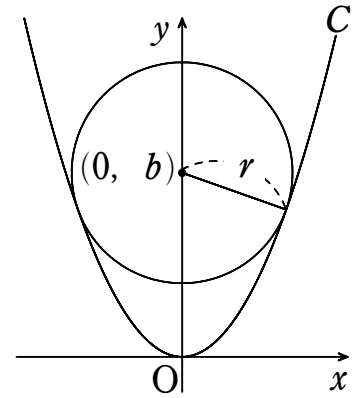
$$\frac{r^2 + 1}{2} > 1$$

$r > 0$ より $r > 1$

①と $y = \frac{r^2 - 1}{2}$ より

$$x^2 = r^2 - 1$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{r^2 - 1}$$



したがって、円の中心の座標は

$$\left(0, \frac{r^2+1}{2}\right)$$

…[答]

であり、2つの接点の座標は

$$\left(\pm\sqrt{r^2-1}, \frac{r^2-1}{2}\right)$$

…[答]

である。 $(r>1)$

2. 円 C_1 の方程式は

$$x^2+(y-1)^2=1$$

これと①より

$$2y+(y-1)^2=1$$

$$y^2=0$$

$$\therefore y=0$$

ゆえに、 C_1 と C の接点は $(0, 0)$ である。

②で $b=r_2+2$, $r=r_2$ とすると、

$$x^2+\{y-(r_2+2)\}^2=r_2^2$$

これと①より

$$2y+\{y-(r_2+2)\}^2=r_2^2$$

$$\therefore y^2-2(r_2+1)y+4r_2+4=0$$

1. の考察より

$$r_2+2=\frac{r_2^2+1}{2}$$

$$2r_2+4=r_2^2+1$$

$$r_2^2-2r_2-3=0$$

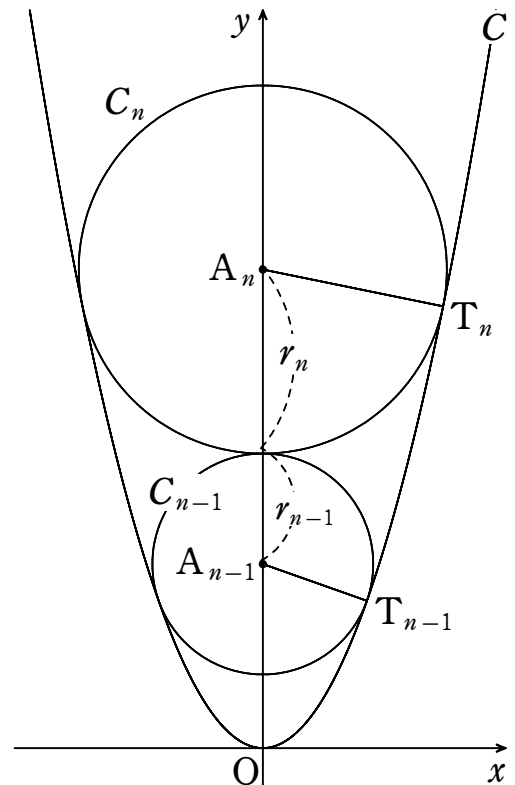
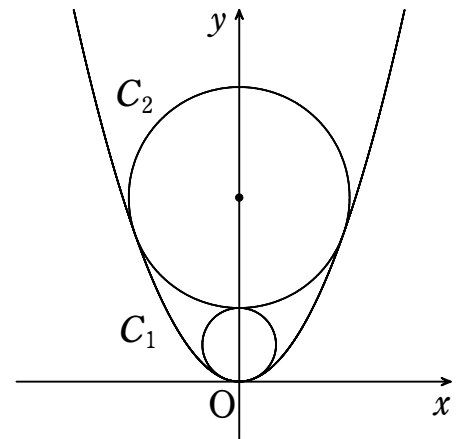
$$(r_2+1)(r_2-3)=0$$

$r_2>0$ より

$$r_2=3$$

$n\geq 3$ のとき、 C_n の中心を A_n , 半径を r_n とし、 C と C_n の接点のうち、 x 座標が正である点を T_n とする。1. の考察より

$$A_n\left(0, \frac{r_n^2+1}{2}\right),$$



$$T_n \left(\sqrt{r_n^2 - 1}, \frac{r_n^2 - 1}{2} \right)$$

である。

$$A_n A_{n-1} = r_n + r_{n-1}$$

より

$$\frac{r_n^2 + 1}{2} - \frac{r_{n-1}^2 + 1}{2} = r_n + r_{n-1}$$

$$\frac{r_n^2 - r_{n-1}^2}{2} - (r_n + r_{n-1}) = 0$$

$$\frac{(r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1})}{2} - (r_n + r_{n-1}) = 0$$

$$\left(\frac{r_n - r_{n-1}}{2} - 1 \right) (r_n + r_{n-1}) = 0$$

$r_{n-1} + r_n > 0$ であるから

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{2} - 1 = 0$$

すなわち

$$r_n - r_{n-1} = 2 \quad \dots(*) \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

$r_2 - r_1 = 2$ より (*) は $n \geq 2$ において成立する。したがって、数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = 1$ 、公差 2 の等差数列であるから

$$r_n = 1 + 2(n-1)$$

ゆえに

$$r_n = 2n - 1$$

…[答]

高松高等予備校