[1]

1. $a_1=3$, $b_1=2$, $c_1=1$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n}{4} \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{4} \cdots\cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{4} \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①+②+③ より

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n)$$

数列 $\{a_n+b_n+c_n\}$ は初項 $a_1+b_1+c_1=6$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n+b_n+c_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots\cdots ④$$

…[答]

2. ①−② より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{4}(a_n-b_n)$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=1$，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdots\cdots ⑤$$

…[答]

①−③ より

$$a_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{4}(a_n-c_n)$$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は初項 $a_1-c_1=2$，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdots\cdots ⑥$$

…[答]

3. ⑤+⑥ より

$$2a_n-(b_n+c_n)=3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdots\cdots ⑦$$

④+⑦ より

$$3a_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$ …[答]

⑤より

$$b_n=a_n-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって

$$b_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ …[答]

⑥より

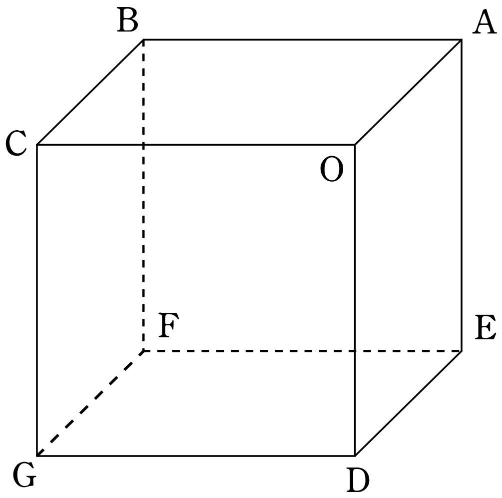
$$c_n=a_n-2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって

$$c_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$ …[答]

[2]

1．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，題意より

$$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$$

であって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{c}+\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{d}+\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$ だから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=1-1=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{d}-\vec{a})=1-1=0\end{cases}$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp \text{平面 ACD}$$

である。また

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=1-1=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{a})=1-1=0\end{cases}$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp \text{平面 BEG}$$

である。線分 OF を 1 : 2，2 : 1 に内分する点を順に，I，J とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|=\frac{1}{3}\sqrt{1+1+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{d}+\vec{a})=\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OJ}}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。よって，相似の関係を用いて

（i） $0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

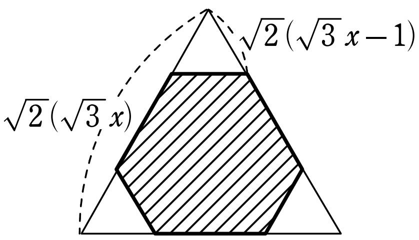
$$S(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot(\sqrt{3}\,x)^2$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

（ii） $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\sqrt{3}$ のとき

$$S(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\{\sqrt{3}(\sqrt{3}-x)\}^2$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2$$

（iii） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=-1$ と $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=\sqrt{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ のなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$ であることと図形の対称性を用いて，切り口は 1 辺が $\sqrt{2}(\sqrt{3}\,x)$ の正三角形から 1 辺が $\sqrt{2}(\sqrt{3}\,x-1)$ の正三角形を 3 つ除いた，下の図のような六角形となるから



$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 6x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}\,x-1)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\,x-1)^2$$
$$=-3\sqrt{3}\,x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

（iv） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき　図形の対称性より，(iii) で x を $\sqrt{3}-x$

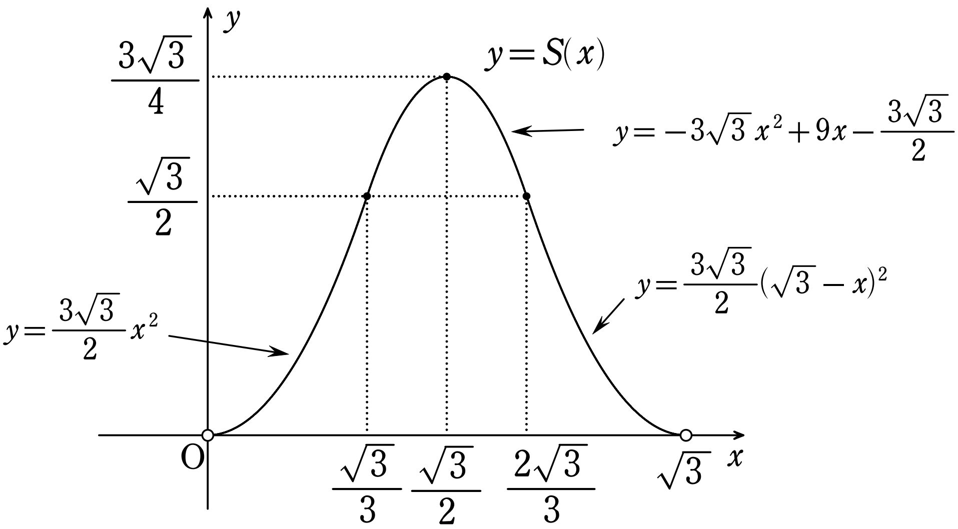
に置き換えることにより

$$S(x)=-3\sqrt{3}\,x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

以上より

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & \left(0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ のとき\right)\\[2mm] -3\sqrt{3}\,x^2+9x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq x<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ のとき\right)\\[2mm] \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2 & \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\sqrt{3}\ のとき\right)\end{cases}$$ …[答]

２．１．の結果より，求めるグラフは



…[答]

３．２．の結果より

$$\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(-3\sqrt{3}\,x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\left[-\sqrt{3}\,x^3+\frac{9}{2}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{5}{6}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．$f(\mathrm{G})=\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\\ \overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}(-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{1}{3}(-2\vec{b}+\vec{c})\\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{1}{3}(\vec{b}-2\vec{c})\end{cases}$$

と表せる。また，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3$ より

$$\begin{aligned}f(\mathrm{G})&=\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\cdot(-2\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-2\vec{c})\\&\qquad+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot(\vec{b}-2\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9f(\mathrm{G})&=-2|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-2|\vec{b}|^2+5\vec{b}\cdot\vec{c}-2|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-2|\vec{c}|^2\\&=-3|\vec{b}|^2+3\vec{b}\cdot\vec{c}-3|\vec{c}|^2\\&=-3(2^2-3+3^2)\\&=-30\end{aligned}$$

$\therefore\quad f(\mathrm{G})=-\dfrac{30}{9}=-\dfrac{10}{3}$ …[答]

2．

$$\begin{aligned}f(\mathrm{P})&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&\qquad+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$f(\mathrm{P})=\dfrac{8}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3$ より

$$3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{8}{3}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{8}{9}$$

$$\left|\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{8}{9}$$

$$\left|\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right|^2=\frac{1}{9}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+8\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right|^2=2$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right|=\sqrt{2}$$

ゆえに点 P は三角形 ABC の重心 G を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

…[答]

3．$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ とすると 2 より

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{P})&=3\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=3\left\{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AP}\right\}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=3\left|\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right|^2-\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=3\left|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}\right|^2-\frac{19}{3}+3\\
&=3\left|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}\right|^2-\frac{10}{3}\geqq-\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[4]

1．$y=e^x$ より $y'=e^x$

したがって，点 $(t,\ e^t)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y=e^t(x-t)+e^t$$

すなわち

$$y=e^tx-te^t+e^t \quad \cdots\cdots①$$

この接線が原点を通るための条件は，上式に $x=y=0$ を代入して

$$0=-te^t+e^t$$

$e^t \neq 0$ であるから，両辺を e^t で割ると

$$0=-t+1$$

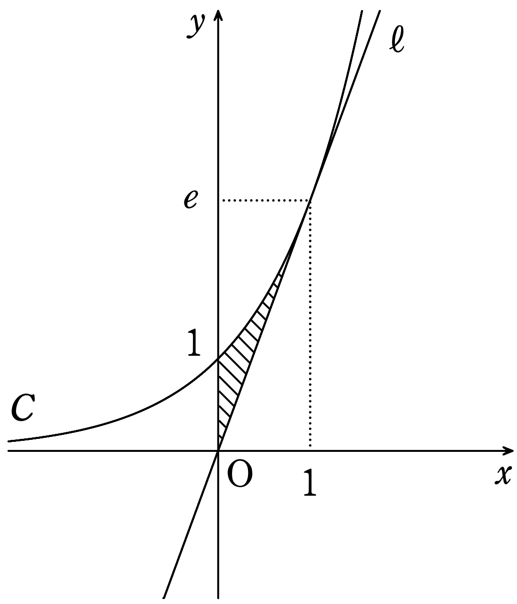
ゆえに

$$t=1$$

したがって，①に $t=1$ を代入すると，ℓ の方程式は

$$y=ex$$ …[答]

2．1．より，C と ℓ の接点の座標は $(1,\ e)$ であるから，図形 D は図の斜線部分。



…[答]

3．求める体積は

$$\pi\int_0^1 (e^x)^2 dx-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\frac{\pi e^2}{3}$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{\pi e^2}{3}$$

$=\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)-\dfrac{\pi e^2}{3}$

$=\dfrac{\pi}{6}(e^2-3)$ …[答]

4． $I=\displaystyle\int \log y\,dy$

$=\displaystyle\int (y)'\log y\,dy$

$=y\log y-\displaystyle\int y\cdot\frac{1}{y}dy$

$=y\log y-\displaystyle\int dy$

$=y\log y-y+C_1$ （C_1 は積分定数） …[答]

$J=\displaystyle\int (\log y)^2 dy$

$=\displaystyle\int (y)'(\log y)^2 dy$

$=y(\log y)^2-\displaystyle\int y\cdot 2(\log y)\frac{1}{y}dy$

$=y(\log y)^2-2I$

$=y(\log y)^2-2(y\log y-y+C_1)$

$=y(\log y)^2-2y\log y+2y+C$ （C は積分定数） …[答]

5． $y=e^x \Leftrightarrow x=\log y$

より，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot e-\pi\displaystyle\int_1^e (\log y)^2 dy$

$=\dfrac{\pi e}{3}-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^e$ （∵ 4．より）

$=\dfrac{\pi e}{3}-\pi(e-2e+2e-2)$

$=\dfrac{2\pi}{3}(3-e)$