[1]

1．　与式より

$$c_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}$$
$$=2a_n+b_n+\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n$$
$$=\frac{5}{2}(a_n+b_n)$$
$$=\frac{5}{2}c_n$$
$$c_{n+1}=\frac{5}{2}c_n$$

…[答]

2．(1) より $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=a_1+b_1=3$，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列である。

よって，

$$c_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

…[答]

3．　$d_n=a_n-2b_n$ とおくと，与式より

$$d_{n+1}=a_{n+1}-2b_{n+1}$$
$$=2a_n+b_n-(a_n+3b_n)$$
$$=a_n-2b_n$$
$$=d_n$$

よって，$\{d_n\}$ は定数の数列だから

$$d_n=a_1-2b_1=-3$$

すなわち，$a_n-2b_n=-3$　…①

また 2．より，$a_n+b_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$　…②

$\frac{①+②\times 2}{3}$ より，$a_n=2\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1$　…[答]

① より，$b_n=\frac{1}{2}(a_n+3)=\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+1$　…[答]

高松高等予備校

[2]

1． C_2 は y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線だから

$$y=ax^2$$

とおける。

これが，点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2)$ を通るから

$$-t^2+2=at^2$$

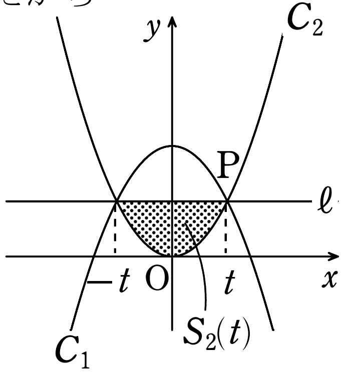
$t\neq 0$ だから　$a=\dfrac{2-t^2}{t^2}$

よって　$y=\dfrac{2-t^2}{t^2}x^2$ …[答]

2． 放物線 C_2 と直線 ℓ の交点の x 座標は $x=t,\ -t$ だから

放物線 C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ は

グラフより



$$S_2(t)=\int_{-t}^{t}\left\{(-t^2+2)-\frac{2-t^2}{t^2}x^2\right\}dx$$

$$=-\frac{2-t^2}{t^2}\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)dx$$

$$=\frac{4}{3}t(2-t^2)$$ …[答]

3． $S_2(t)=\dfrac{4}{3}(2t-t^3)$

$S_2'(t)=\dfrac{4}{3}(2-3t^2)$

$S_2'(t)=0$ とすると　$0<t<\sqrt{2}$ より $t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$S_2(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$S_2'(t)$	／	$+$	0	$-$	／
$S_2(t)$	／	↗	極大	↘	／

よって　$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{16}{27}\sqrt{6}$ …[答]

4．　放物線 C_1 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_1(t)$ は

グラフより

$$S_1(t)=\int_{-t}^{t}\{-x^2+2-(-t^2+2)\}dx$$
$$=-\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)dx$$
$$=\frac{4}{3}t^3$$

$S_1(t)=S_2(t)$ より

$$\frac{4}{3}t^3=\frac{4}{3}t(2-t^2)$$
$$t^3=t(2-t^2)$$
$$t(t+1)(t-1)=0$$

$0<t<\sqrt{2}$ だから　$t=1$　…[答]

高松高等予備校

[3]

1．$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BAD}=2$ …[答]

2．k，m を実数とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

とおける。BC⊥AP より

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2=0$$

$$2+9k=0$$

$$k=-\frac{2}{9}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}$$ …[答]

また，点Qは直線BD上の点より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\vec{a}+(1-m)\vec{b}$$

とおける。BD⊥AQ より

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{m\vec{a}+(1-m)\vec{b}\}=0$$

$$-m|\vec{a}|^2+(2m-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-m)|\vec{b}|^2=0$$

$$-4m+4m-2+9-9m=0$$

$$m=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}$$ …[答]

3. $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\left|\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right|^2$

$=|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{81}|\vec{b}|^2$

$=4-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}$

$=\frac{32}{9}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ …[答]

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2=\left|\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}\right|^2$

$=\frac{49}{81}|\vec{a}|^2+\frac{28}{81}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{81}|\vec{b}|^2$

$=\frac{196}{81}+\frac{56}{81}+\frac{36}{81}$

$=\frac{32}{9}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ …[答]

4. $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$

$=\left|-\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right|^2$

$=\frac{4}{81}|\vec{a}|^2-\frac{16}{81}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{16}{81}|\vec{b}|^2$

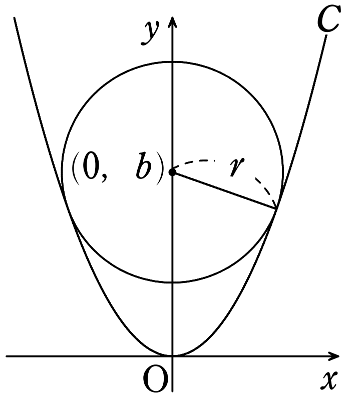
$=\frac{16}{81}-\frac{32}{81}+\frac{144}{81}$

$=\frac{128}{81}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\frac{8\sqrt{2}}{9}$ …[答]

[4]

1．放物線の対称性より円の中心を $(0,\ b)$ とおく。



$$C:\ y=\frac{1}{2}x^2 \quad \cdots ①$$

$$円:\ x^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots ②$$

①より $x^2=2y$ を②に代入すると

$$2y+(y-b)^2=r^2$$

すなわち

$$y^2-2(b-1)y+b^2-r^2=0 \quad \cdots ③$$

半径 r の円が放物線 C と 2 点で接する条件は y の 2 次方程式③が

$$y=\frac{1}{2}x^2>0$$

となる重解をもつことである。③の判別式を D とすると $D=0$ より

$$\frac{D}{4}=(b-1)^2-(b^2-r^2)=0$$

すなわち

$$-2b+1+r^2=0$$

$$\therefore \quad b=\frac{r^2+1}{2} \quad \cdots ④$$

このとき，重解は

$$y=-\frac{-2(b-1)}{2\cdot 1}=b-1 \quad \cdots ⑤$$

で $b-1>0$ から $b>1 \quad \cdots ⑥$

④，⑤より

$$y=\frac{r^2+1}{2}-1$$

$$=\frac{r^2-1}{2}$$

④，⑥より

$$\frac{r^2+1}{2}>1$$

$r>0$ より $r>1$

①と $y=\dfrac{r^2-1}{2}$ より

$$x^2=r^2-1$$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{r^2-1}$$

したがって，円の中心の座標は

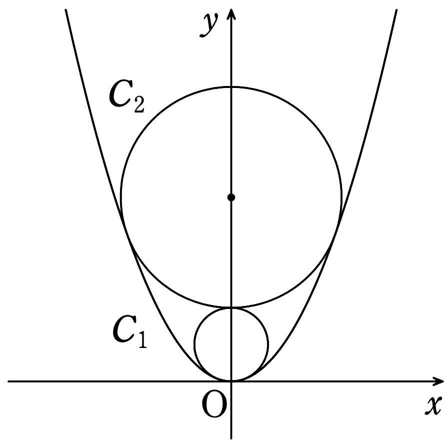
$$\left(0,\ \frac{r^2+1}{2}\right) \qquad \cdots[答]$$

であり，2 つの接点の座標は

$$\left(\pm\sqrt{r^2-1},\ \frac{r^2-1}{2}\right) \qquad \cdots[答]$$

である。$(r>1)$

2．円 C_1 の方程式は



$$x^2+(y-1)^2=1$$

これと①より

$$2y+(y-1)^2=1$$

$$y^2=0$$

$$\therefore \quad y=0$$

ゆえに，C_1 と C の接点は $(0,\ 0)$ である。

②で $b=r_2+2$，$r=r_2$ とすると，

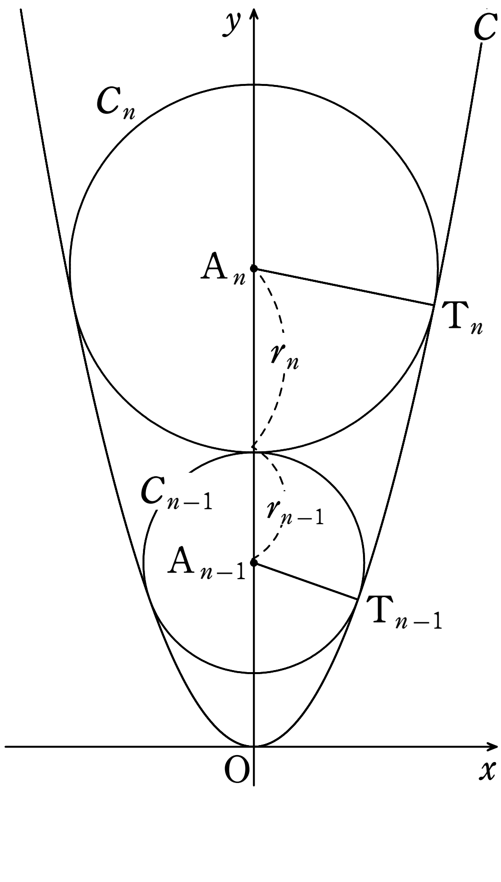
$$x^2+\{y-(r_2+2)\}^2={r_2}^2$$

これと①より

$$2y+\{y-(r_2+2)\}^2={r_2}^2$$

$$\therefore \quad y^2-2(r_2+1)y+4r_2+4=0$$

1．の考察より



$$r_2+2=\frac{{r_2}^2+1}{2}$$

$$2r_2+4={r_2}^2+1$$

$${r_2}^2-2r_2-3=0$$

$$(r_2+1)(r_2-3)=0$$

$r_2>0$ より

$$r_2=3$$

$n \geqq 3$ のとき，C_n の中心を A_n，半径を r_n とし，C と C_n の接点のうち，x 座標が正である点をT_n とする。1．の考察より

$$\mathrm{A}_n\left(0,\ \frac{{r_n}^2+1}{2}\right),$$

$$\mathrm{T}_n\left(\sqrt{{r_n}^2-1},\ \frac{{r_n}^2-1}{2}\right)$$

である。

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}=r_n+r_{n-1}$$

より

$$\frac{{r_n}^2+1}{2}-\frac{{r_{n-1}}^2+1}{2}=r_n+r_{n-1}$$

$$\frac{{r_n}^2-{r_{n-1}}^2}{2}-(r_n+r_{n-1})=0$$

$$\frac{(r_n-r_{n-1})(r_n+r_{n-1})}{2}-(r_n+r_{n-1})=0$$

$$\left(\frac{r_n-r_{n-1}}{2}-1\right)(r_n+r_{n-1})=0$$

$r_{n-1}+r_n>0$ であるから

$$\frac{r_n-r_{n-1}}{2}-1=0$$

すなわち

$$r_n-r_{n-1}=2 \quad \cdots(*) \qquad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

$r_2-r_1=2$ より $(*)$ は $n\geqq 2$ において成立する。したがって，数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1=1$，公差 2 の等差数列であるから

$$r_n=1+2(n-1)$$

ゆえに

$$r_n=2n-1$$

…[答]

高松高等予備校

[5]

1．$y=\dfrac{1}{x}$ より

$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

接点を$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$とすると，接線の方程式は

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$$

$$y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots①$$

A$(a,\ 0)$を通るので

$$0=-\frac{a}{t^2}+\frac{2}{t}$$

$$\frac{a}{t^2}=\frac{2}{t}$$

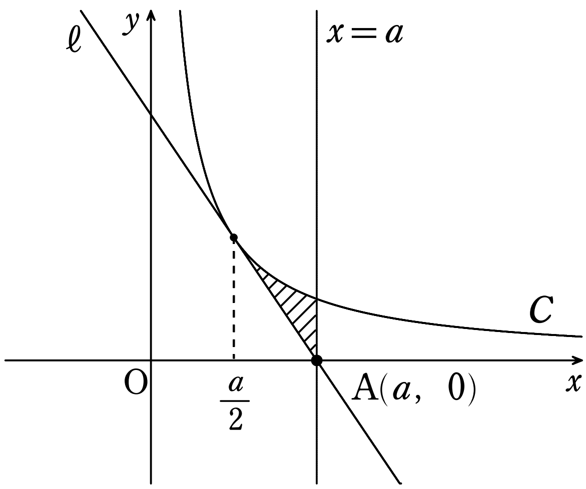
$$a=2t$$

$$t=\frac{a}{2}$$

① より，求める接線 l の方程式は

$$y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a}$$ …[答]

2．



図より

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left\{\frac{1}{x}-\left(-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{a^2}x-\frac{4}{a}\right)dx$$

$$=\left[\log x+\frac{2x^2}{a^2}-\frac{4}{a}x\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$=\log a+2-4-\log\frac{a}{2}-\frac{2}{a^2}\times\frac{a^2}{4}+2$$

$$=\log a-2-(\log a-\log 2)-\frac{1}{2}+2$$

$$=\log 2-\frac{1}{2}$$

…[答]

高松高等予備校