[1]

1．　与式より

$$c_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}$$
$$=2a_n+b_n+\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n$$
$$=\frac{5}{2}(a_n+b_n)$$
$$=\frac{5}{2}c_n$$

$$c_{n+1}=\frac{5}{2}c_n$$ …[答]

2．(1) より $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=a_1+b_1=3$，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列である。

よって，

$$c_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$ …[答]

3．　$d_n=a_n-2b_n$ とおくと，与式より

$$d_{n+1}=a_{n+1}-2b_{n+1}$$
$$=2a_n+b_n-(a_n+3b_n)$$
$$=a_n-2b_n$$
$$=d_n$$

よって，$\{d_n\}$ は定数の数列だから

$$d_n=a_1-2b_1=-3$$

すなわち，$a_n-2b_n=-3$　…①

また 2．より，$a_n+b_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$　…②

$\frac{①+②\times 2}{3}$ より，$a_n=2\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1$ …[答]

① より，$b_n=\frac{1}{2}(a_n+3)=\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+1$ …[答]

高松高等予備校

[2]

1．　C_2 は y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線だから

$$y=ax^2$$

とおける。

これが，点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2)$ を通るから

$$-t^2+2=at^2$$

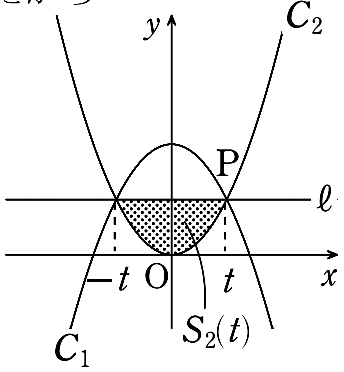
$t \neq 0$ だから　$a=\dfrac{2-t^2}{t^2}$

よって　$y=\dfrac{2-t^2}{t^2}x^2$　…[答]

2．　放物線 C_2 と直線 ℓ の交点の x 座標は $x=t,\ -t$ だから

放物線 C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ は

グラフより



$$S_2(t)=\int_{-t}^{t}\left\{(-t^2+2)-\frac{2-t^2}{t^2}x^2\right\}dx$$

$$=-\frac{2-t^2}{t^2}\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)dx$$

$$=\frac{4}{3}t(2-t^2)$$　…[答]

3．　$S_2(t)=\dfrac{4}{3}(2t-t^3)$

$S_2{}'(t)=\dfrac{4}{3}(2-3t^2)$

$S_2{}'(t)=0$ とすると　$0<t<\sqrt{2}$ より $t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$S_2(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	…	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	…	$\sqrt{2}$
$S_2{}'(t)$	／	＋	0	－	／
$S_2(t)$	／	↗	極大	↘	／

よって　$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{16}{27}\sqrt{6}$　…[答]

4． 放物線 C_1 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_1(t)$ は

グラフより

$$S_1(t)=\int_{-t}^{t}\{-x^2+2-(-t^2+2)\}dx$$

$$=-\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)dx$$

$$=\frac{4}{3}t^3$$

$S_1(t)=S_2(t)$ より

$$\frac{4}{3}t^3=\frac{4}{3}t(2-t^2)$$

$$t^3=t(2-t^2)$$

$$t(t+1)(t-1)=0$$

$0<t<\sqrt{2}$ だから　$t=1$ …[答]

高松高等予備校

[3]

1．$y=f(x)$ の定義域は $18-x>0$ より

$$x<18$$

このとき，x 軸との交点は

$$\log_3(18-x)=0$$

$$18-x=1$$

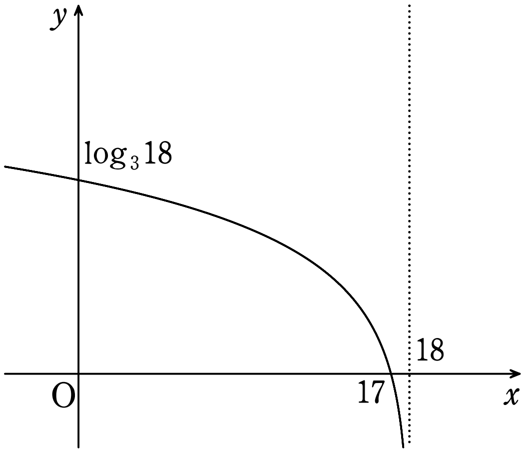
$$x=17$$

y 軸との交点は

$$y=\log_3(18-0)$$

$$=\log_3 18$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のとおりである



…[答]

2．$0<x<2$ において

$$h(x)=\log_9(4x^4)$$

$$=\frac{\log_3(2x^2)^2}{\log_3 3^2}$$

$$=\log_3(2x^2)$$

ここで，$S(x)=(18-x)-4x^2$ とおくと

$$S(x)=-4x^2-x+18$$

$$S'(x)=-8x-1$$

$0<x<2$ より $S'(x)<0$

したがって，$S(x)$ は単調減少であり，$S(2)=0$ より $S(x)>0$

よって

$$18-x>4x^2 \quad (0<x<2)$$

底 3 は 1 より大きいので

$$\log_3(18-x)>\log_3(4x^2)$$

すなわち

$$f(x)>g(x) \quad \cdots ①$$

$0<x<2$ において $4x^2>2x^2$

底 3 は 1 より大きいので

$$\log_3(4x^2)>\log_3(2x^2)$$

すなわち

$$g(x) > h(x) \quad \cdots②$$

①，②より

$$f(x) > g(x) > h(x) \qquad \cdots[答]$$

３．

$$y = f(x) - \frac{1}{2}g(x) + h(x)$$

$$= \log_3(18-x) - \frac{1}{2}\log_3(4x^2) + \log_9(4x^4)$$

$$= \log_3(18-x) - \log_3(2x) + \log_3(2x^2)$$

$$= \log_3\frac{(18-x)\cdot 2x^2}{2x}$$

$$= \log_3 x(18-x)$$

ここで，$p(x) = x(18-x)$ とおくと

底 3 は 1 より大きいから，y が最大となるのは $p(x)$ が最大となるときである。

$$p(x) = -x^2 + 18x$$

$$= -(x-9)^2 + 81$$

よって，$x=9$ のとき $p(x)$ は最大となり，このとき y も最大

最大値は $p(9)=81$ より

$$y = \log_3 81$$

$$= \log_3 3^4$$

$$= 4$$

以上より，$x=9$ のとき最大値 4 $\qquad \cdots$[答]

高松高等予備校

[4]

1．$y=e^x$ より $y'=e^x$

したがって，点 $(t,\ e^t)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y=e^t(x-t)+e^t$$

すなわち

$$y=e^tx-te^t+e^t \quad \cdots\cdots ①$$

この接線が原点を通るための条件は，上式に $x=y=0$ を代入して

$$0=-te^t+e^t$$

$e^t \fallingdotseq 0$ であるから，両辺を e^t で割ると

$$0=-t+1$$

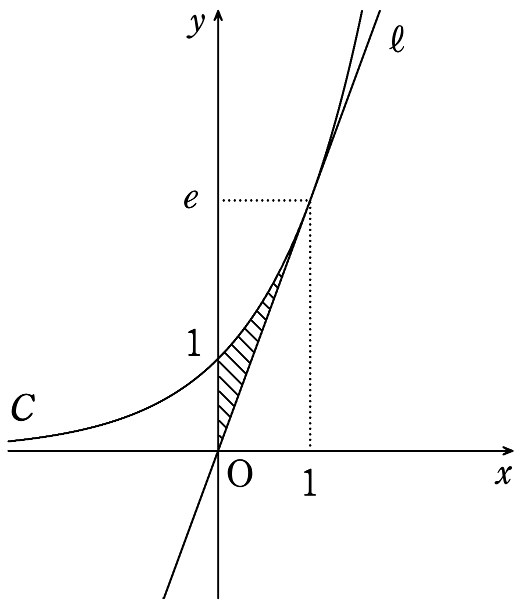
ゆえに

$$t=1$$

したがって，①に $t=1$ を代入すると，ℓ の方程式は

$$y=ex$$ …[答]

2．1． より，C と ℓ の接点の座標は $(1,\ e)$ であるから，図形 D は図の斜線部分。



…[答]

3．求める体積は

$$\pi\int_0^1 (e^x)^2 dx-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\frac{\pi e^2}{3}$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{\pi e^2}{3}$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)-\frac{\pi e^2}{3}$$

$$=\frac{\pi}{6}(e^2-3)$$ …[答]

4．　$I=\int \log y\,dy$

$$=\int (y)'\log y\,dy$$

$$=y\log y-\int y\cdot\frac{1}{y}dy$$

$$=y\log y-\int dy$$

$$=y\log y-y+C_1$$ （C_1 は積分定数） …[答]

$$J=\int (\log y)^2dy$$

$$=\int (y)'(\log y)^2dy$$

$$=y(\log y)^2-\int y\cdot 2(\log y)\frac{1}{y}dy$$

$$=y(\log y)^2-2I$$

$$=y(\log y)^2-2(y\log y-y+C_1)$$

$$=y(\log y)^2-2y\log y+2y+C$$ （C は積分定数） …[答]

5．　$y=e^x \Leftrightarrow x=\log y$

より，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot e-\pi\int_1^e(\log y)^2dy$$

$$=\frac{\pi e}{3}-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^e$$ （∵ 4．より）

$$=\frac{\pi e}{3}-\pi(e-2e+2e-2)$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3-e)$$

高松高等予備校