数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

1

(1)　$n=3^2!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot3^2$

$1, 2, 3, \cdots, 3^2$ の中に，3 の倍数は $\dfrac{3^2}{3}=3$ 個

同様に，3^2 の倍数は $\dfrac{3^2}{3^2}=1$ 個

よって，n は

$$n=3^4\cdot A \quad (A\text{ は }3\text{ と互いに素な正の整数})$$

と表される。よって，3^d が n の約数となる最大の d は $d=4$

$\therefore \quad f(n)=4$ …[答]

(2)　$n=5^2!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot5^2$

(1)と同様に考えると

$$\frac{5^2}{5}=5,\quad \frac{5^2}{5^2}=1$$

よって，n は

$$n=5^6\cdot B \quad (B\text{ は }5\text{ と互いに素な正の整数})$$

と表される。よって，5^d が n の約数となる最大の d は $d=6$

$\therefore \quad f(n)=6$ …[答]

(3)　$n=p^m!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot p^m$

$k=1, 2, 3, \cdots, m$ について $1, 2, 3, \cdots, p^m$ の中に p^k の倍数は

$\dfrac{p^m}{p^k}=p^{m-k}$ 個ある。

よって，n は

$$n=p^{\sum_{k=1}^{m} p^{m-k}}\cdot C \quad (C\text{ は }p\text{ と互いに素な正の整数})$$

と表される。よって，p^d が n の約数となる最大の d は

$$d=\sum_{k=1}^{m} p^{m-k}$$

$$=\frac{p^m-1}{p-1}$$

$\therefore \quad f(n)=\dfrac{p^m-1}{p-1}$ …[答]

2

(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ より

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

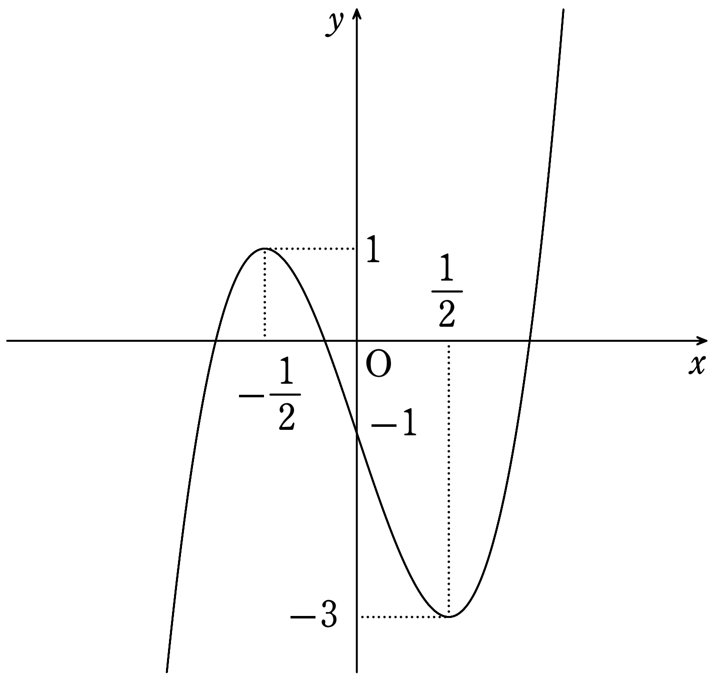
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

また

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

より，曲線 $y=f(x)$ の概形は次のようになる。



グラフより，曲線 $y=f(x)$ は x 軸と異なる 3 点で交わる。

ゆえに，$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3 個。　…[答]

(2)　$\theta=\frac{5\pi}{9}$ とすると $a=\cos\theta$ であり

$$\cos 3\theta=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2}$$

これより

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0$$

すなわち

$$8a^3 - 6a - 1 = 0$$

ゆえに

$$f(a) = 0 \qquad \cdots[答]$$

(3)　(2) より

$$f\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

また

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{17}{125}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27}$$

より

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) < f\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right) < f\left(-\frac{1}{5}\right) \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3}$ より

$$\cos\frac{2\pi}{3} < \cos\frac{5\pi}{9} < \cos\frac{\pi}{2}$$

よって

$$-\frac{1}{2} < \cos\frac{5\pi}{9} < 0 \quad \cdots\cdots②$$

さらに，(1) より，$f(x)$ は $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ において単調に減少するため，

①，②より

$$-\frac{1}{5} < \cos\frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6} \qquad [終]$$

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

３

(1)　$f_a'(x)=ae^{-\frac{x}{a}}-xe^{-\frac{x}{a}}=(a-x)e^{-\frac{x}{a}}$

$f_a''(x)=-e^{-\frac{x}{a}}-\dfrac{1}{a}(a-x)e^{-\frac{x}{a}}$

$=\dfrac{1}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}}$

$f_a''(x)=0$ のとき $x=2a$

$x=2a$ の前後で$f_a''(x)$の符号は変化する

$f_a(2a)=2a^2e^{-2}$

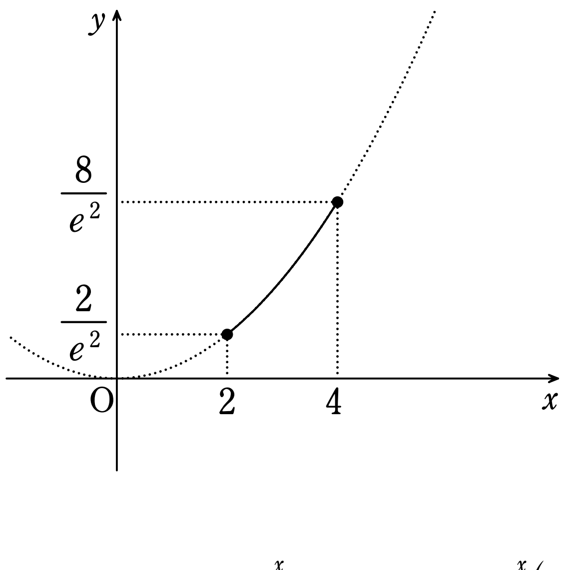
よって，$\mathrm{P}(2a,\ 2a^2e^{-2})$ …[答]

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと $x=2a$，$y=2a^2e^{-2}$

ここで，$1\leqq a\leqq 2$ より $2\leqq x\leqq 4$

$y=2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot e^{-2}=\dfrac{x^2}{2e^2}$

点Pが描く図形は次のとおりである



…[答]

(3)　$f_2(x)-f_1(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}-xe^{-x}=xe^{-\frac{x}{2}}\left(2-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき $-2\leqq -\dfrac{x}{2}\leqq -1$ から

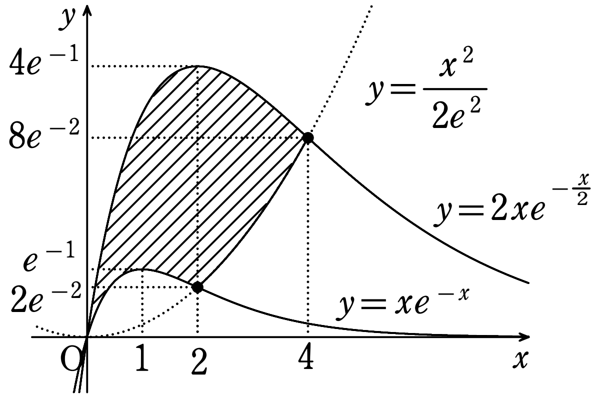
$e^{-2}\leqq e^{-\frac{x}{2}}\leqq e^{-1}$

よって $2-e^{-\frac{x}{2}}>0$

したがって，$x\geqq 0$ において $f_2(x)\geqq f_1(x)$

曲線Cと$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$との共有点は，(2)からそれぞれの変曲点であるから
曲線Cと$y=f_1(x)$との共有点のx座標は$x=2$
曲線Cと$y=f_2(x)$との共有点のx座標は$x=4$
である
したがって，求める部分の面積は

$$S=\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}\,dx-\int_0^2 xe^{-x}\,dx-\int_2^4 \frac{x^2}{2e^2}\,dx$$



ところで

$$\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}\,dx=\left[-4xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4+4\int_0^4 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=-16e^{-2}+\left[-8e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4$$

$$=-16e^{-2}-8e^{-2}+8$$

$$=8-\frac{24}{e^2}$$

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^2+\int_0^2 e^{-x}\,dx$$

$$=-2e^{-2}+\left[-e^{-x}\right]_0^2$$

$$=-2e^{-2}-e^{-2}+1$$

$$=1-\frac{3}{e^2}$$

$$\int_2^4 \frac{x^2}{2e^2}\,dx=\left[\frac{x^3}{6e^2}\right]_2^4=\frac{64-8}{6e^2}=\frac{28}{3e^2}$$

したがって，

$$S=\left(8-\frac{24}{e^2}\right)-\left(1-\frac{3}{e^2}\right)-\frac{28}{3e^2}$$

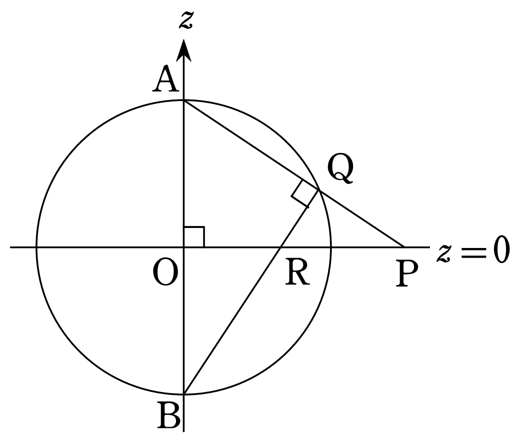
$$=7-\frac{91}{3e^2}$$ …[答]

4

(1)　直線 OP と z 軸とを含む平面上で考える。

[1]　$\mathrm{OP}>1$ のとき

半円の弧に対する円周角は 90°であるから，四角形 ORQA は円に内接する。



よって

$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{ORB}$

であるから

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{ORB}$

ゆえに

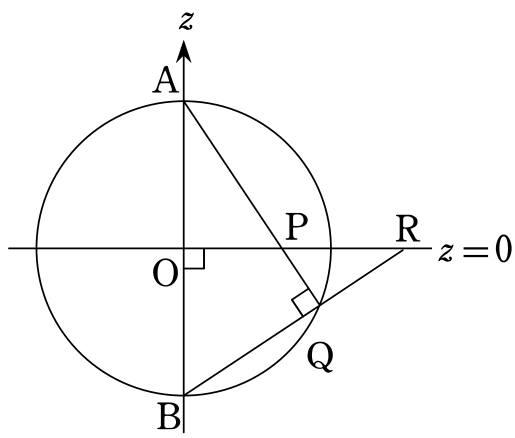
$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OR}:\mathrm{OB}$

なので

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$

[2]　$0<\mathrm{OP}<1$ のとき

[1] と同様に，四角形 OPQB は円に内接する。



よって

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OBR}$

であるから

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{ORB}$

ゆえに

$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OR}:\mathrm{OB}$

なので

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$

[3]　$\mathrm{OP}=1$ のとき

$\mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ だから

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$

以上より

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$　…[答]

(2)　(1) の考察より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\ \cdots\cdots①$$

ゆえに

$$s=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}u=\frac{u}{u^2+v^2}$$ …[答]

(3)　①より

$$t=\frac{v}{u^2+v^2}$$

であり，$a^2+b^2>0$，$c\neq 0$ なる実数 a，b，c を用いて l の方程式は

$$\begin{cases} ax+by=c \\ z=0 \end{cases}$$

と表されるから，点 P が l 上を動くとき，(2) の結果より

$$a\cdot\frac{u}{u^2+v^2}+b\cdot\frac{v}{u^2+v^2}=c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c}u+\frac{b}{c}v=u^2+v^2$$

$$\Leftrightarrow \left(u-\frac{a}{2c}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4c^2}$$

よって，点 R は xy 平面上の中心 $\left(\frac{a}{2c}, \frac{b}{2c}, 0\right)$，半径 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|}$ の円周上にある。 …[終]