平成２８年度入学試験問題

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に，それぞれ２箇所受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。
また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
ただし，裏面は採点の対象になりません。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

1

p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d（$d \geqq 0$）のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $p = 3$，$n = 3^{2}!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2) $p = 5$，$n = 5^{2}!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3) m が正の整数で $n = p^{m}!$ のとき $f(n)$ を求めよ。

2

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a = \cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos\frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

3

a は正の数とし，次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}} \qquad (x \geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) a が区間 $1 \leqq a \leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3) $x \geqq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ と (2) の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

座標空間内に，原点 O (0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 A (0, 0, 1)，B (0, 0, −1) がある。O と異なる点 P (s, t, 0) に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を R (u, v, 0) とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) ふたつの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u，v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。