数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

1

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ より

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

よって

$$\omega^3=\omega\cdot\omega^2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{1+3}{4}=1 \ \cdots\cdots①$$

また，①より

$$\omega^3-1=0$$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$\omega\fallingdotseq 1$ より

$$\omega^2+\omega+1=0 \ \cdots\cdots②$$

したがって，①，②より

$$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega\cdot\omega^3=\omega^2+\omega=-1$$ …[答]

$$\omega^5+\omega^{10}=\omega^2\cdot\omega^3+\omega\cdot(\omega^3)^3=\omega^2+\omega=-1$$ …[答]

(2)　(1) より

[1]　$n=3m+1$ (m は 0 以上の整数) のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3m+1}+\omega^{6m+2}=\omega\cdot(\omega^3)^m+\omega^2\cdot(\omega^3)^{2m}$$
$$=\omega+\omega^2=-1$$

[2]　$n=3m+2$ (m は 0 以上の整数) のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3m+2}+\omega^{6m+4}=\omega^2\cdot(\omega^3)^m+\omega\cdot(\omega^3)^{2m+1}$$
$$=\omega^2+\omega=-1$$

[3]　$n=3m$ (m は自然数) のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3m}+\omega^{6m}=(\omega^3)^m+(\omega^3)^{2m}=1+1=2$$

[1]，[2]，[3] より

$$\left.\begin{array}{l} n=3m+1\ (m\text{ は 0 以上の整数})\text{ のとき}\quad \omega^n+\omega^{2n}=-1 \\ n=3m+2\ (m\text{ は 0 以上の整数})\text{ のとき}\quad \omega^n+\omega^{2n}=-1 \\ n=3m\ (m\text{ は 自然数})\text{ のとき}\quad \omega^n+\omega^{2n}=2 \end{array}\right)$$ …[答]

(3)　二項定理より

$$
\begin{aligned}
&(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n \\
&=(\omega^n+{}_n\mathrm{C}_1\,\omega^{n-1}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\,\omega^{n-2}\cdot 2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,\omega\cdot 2^{n-1}+2^n) \\
&\quad+(\omega^{2n}+{}_n\mathrm{C}_1\,(\omega^2)^{n-1}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\,(\omega^2)^{n-2}\cdot 2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,\omega^2\cdot 2^{n-1}+2^n) \\
&=(\omega^n+\omega^{2n})+{}_n\mathrm{C}_1\{\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)}\}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\{\omega^{n-2}+\omega^{2(n-2)}\}\cdot 2^2 \\
&\quad+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(\omega+\omega^2)\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^n
\end{aligned}
$$

(2) より，正の整数 k に対して $\omega^k+\omega^{2k}$ は整数であるから，

$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ は整数である。 [終]

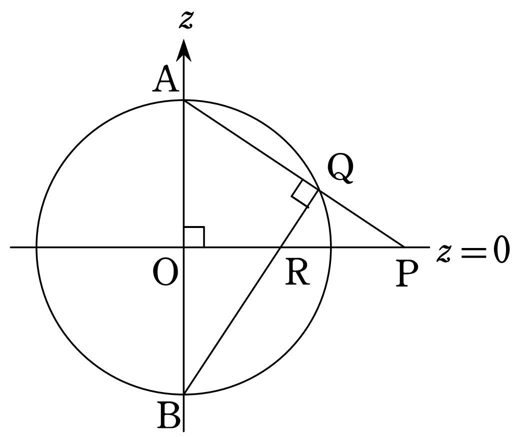
数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

２

(1)　直線 OP と z 軸とを含む平面上で考える。

[1]　$\mathrm{OP}>1$ のとき

半円の弧に対する円周角は $90°$ であるから，四角形 ORQA は円に内接する。



よって

$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{ORB}$

であるから

$\triangle\mathrm{OAP} \backsim \triangle\mathrm{ORB}$

ゆえに

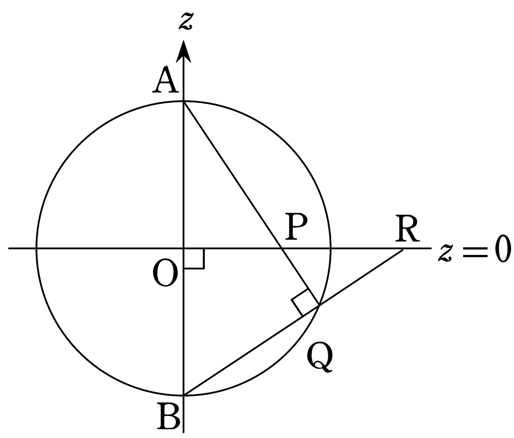
$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OR}:\mathrm{OB}$

なので

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$

[2]　$0<\mathrm{OP}<1$ のとき

[1] と同様に，四角形 OPQB は円に内接する。



よって

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OBR}$

であるから

$\triangle\mathrm{OAP} \backsim \triangle\mathrm{ORB}$

ゆえに

$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OR}:\mathrm{OB}$

なので

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$

[3]　$\mathrm{OP}=1$ のとき

$\mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ だから

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$

以上より

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$　　…[答]

(2)　(1) の考察より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdots\cdots ①$$

ゆえに

$$s=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}u=\frac{u}{u^2+v^2}$$ …[答]

(3)　①より

$$t=\frac{v}{u^2+v^2}$$

であり，点 P が l 上を動くとき，(2) の結果より

$$a\cdot\frac{u}{u^2+v^2}+b\cdot\frac{v}{u^2+v^2}=1$$

$$\Leftrightarrow au+bv=u^2+v^2$$

$$\Leftrightarrow \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

よって，点 R は xy 平面上の中心 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ 0\right)$，半径 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ の円周上にある。 …[終]

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

３

A$(a_1,\ a_2)$ および $a_1=u$，$a_2=0$ より点 A は x 軸の正の部分にあり，OA$=a_1$ である。

また，B$(b_1,\ b_2)$ および $b_1=v\cos\dfrac{(w+2)\pi}{12}$，$b_2=v\sin\dfrac{(w+2)\pi}{12}$ であるから，点 B は半径 v の円周上にあり，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{(w+2)\pi}{12}$ である。

(1)　△OAB が正三角形になるのは

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\ \text{かつ}\ \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$u=v\ \text{かつ}\ w=2$$

の場合であり，求める確率は

$$\frac{6}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{36}$$ …[答]

(2)　△OAB が大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となるのは

「OA : OB$=1:2$ かつ $w=2$」または「OA : OB$=2:1$ かつ $w=2$」

すなわち

$$(u,\ v,\ w)=(1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (4,\ 2,\ 2),\ (6,\ 3,\ 2)$$

の場合であり，求める確率は

$$\frac{6}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{36}$$ …[答]

4

(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ より

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

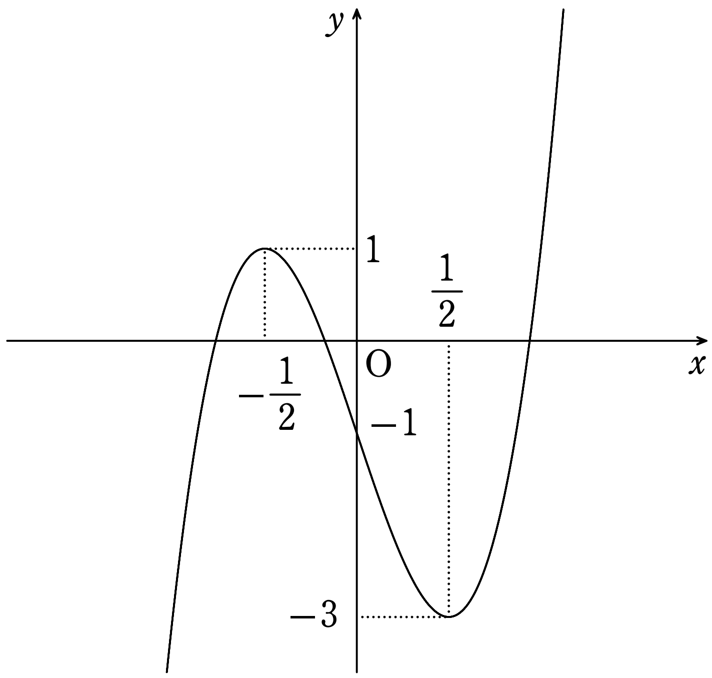
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

また

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

より，曲線 $y=f(x)$ の概形は次のようになる。



グラフより，曲線 $y=f(x)$ は x 軸と異なる 3 点で交わる。

ゆえに，$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3 個。　…[答]

(2)　$\theta=\dfrac{5\pi}{9}$ とすると $a=\cos\theta$ であり

$$\cos 3\theta=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2}$$

これより

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0$$

すなわち

$$8a^3 - 6a - 1 = 0$$

ゆえに

$$f(a) = 0$$ …[答]

(3)　(2) より

$$f\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

また

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{17}{125}\ ,\ f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27}$$

より

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) < f\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right) < f\left(-\frac{1}{5}\right) \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{5\pi}{9} < \dfrac{2\pi}{3}$ より

$$\cos\frac{2\pi}{3} < \cos\frac{5\pi}{9} < \cos\frac{\pi}{2}$$

よって

$$-\frac{1}{2} < \cos\frac{5\pi}{9} < 0 \quad \cdots\cdots②$$

さらに，(1) より，$f(x)$ は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ において単調に減少するため，

①，②より

$$-\frac{1}{5} < \cos\frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$ [終]