数学　２０１　その１

(1)　$y=x^3$ より

$$y'=3x^2$$

点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における法線 l の方程式は，$t>0$ より

$$y-t^3=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$$

よって

$$y=-\frac{1}{3t^2}x+t^3+\frac{1}{3t}$$
…[答]

(2)　(1)より $\mathrm{Q}\left(0,\ t^3+\frac{1}{3t}\right)$だから，$t>0$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\sqrt{(0-t)^2+\left(t^3+\frac{1}{3t}-t^3\right)^2}\\&=\sqrt{t^2+\frac{1}{9t^2}}\\&=\frac{\sqrt{9t^4+1}}{3t}\end{aligned}$$
…[答]

(3)　(2)より $t^2+\frac{1}{9t^2}$ が最小のとき PQ は最小となる。

$t^2>0$ だから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t^2+\frac{1}{9t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{9t^2}}=\frac{2}{3}$$

等号は $t^2=\frac{1}{9t^2}$ かつ $t>0$ すなわち $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき成り立つ。

よって，PQ は $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。　…[答]

高松高等予備校

数学　２０１　その２

(1)　$\alpha \fallingdotseq 0$ だから $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で割ると

$$1+\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=0$$

$$\therefore \quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

…[答]

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき

$$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

なので

$$r=1,\quad \theta=\frac{2}{3}\pi$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき

$$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

なので

$$r=1,\quad \theta=\frac{4}{3}\pi$$

以上より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき $r=1$，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき $r=1$，$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$　…[答]

(3)　(2)より $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より

$$|\alpha|=|\beta|$$

よって

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$$

また，(2) より $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ または $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

であるから

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi$$

よって

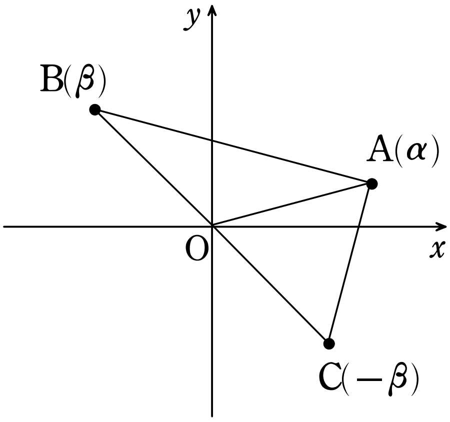
$$\angle \mathrm{OAB}=\angle \mathrm{OBA}=\frac{\pi}{6}$$

以上より

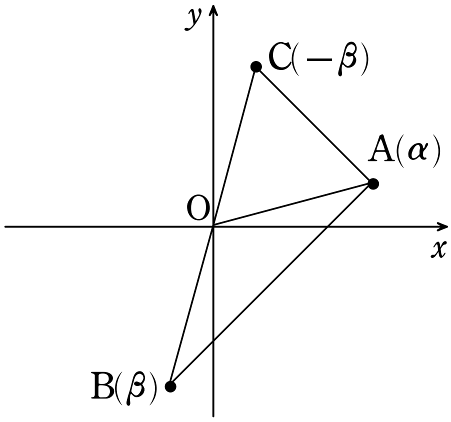
$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi,\ \ \angle \mathrm{OAB}=\angle \mathrm{OBA}=\frac{\pi}{6} \qquad \cdots[答]$$

(4) (参考図)

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき



$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき



点 B と点 C は原点に関して対称だから

$$\mathrm{BC}=2\mathrm{OB}$$

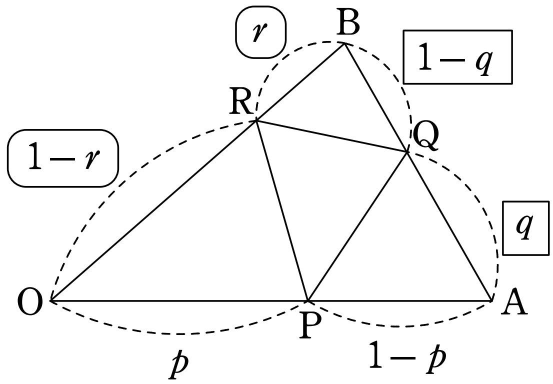
△ABO と△ABC は BO，BC を底辺としたときの高さが等しいので

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OB}}=2 \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校

数学　２０１　その３

(1)



題意より

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ だから

$$\begin{cases}1=p+1-q\\1=q+1-r\end{cases}$$

よって

$$p=q=r$$

したがって

$p:q:r=1:1:1$ …[答]

(2)　$\mathrm{C}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{D}(x_2,\ y_2)$ とし，$\angle\mathrm{COD}=\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OCD}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{({x_1}^2+{y_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{{x_1}^2{y_2}^2-2x_1x_2y_1y_2+{x_2}^2{y_1}^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$ [証明終]

(3) $S_2=\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OPR}-\triangle\mathrm{AQP}-\triangle\mathrm{BRQ}$

$\triangle\mathrm{OPR}$ は $\angle\mathrm{O}$ を $\triangle\mathrm{OAB}$ と共有するから

$$\triangle\mathrm{OPR}=\triangle\mathrm{OAB}\times\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\times\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}}=p(1-r)\triangle\mathrm{OAB}$$

$$=p(1-r)S_1$$

同様に

$$\triangle\mathrm{AQP}=q(1-p)S_1$$

$$\triangle\mathrm{BRQ}=r(1-q)S_1$$

も成り立つ。

よって

$$\frac{S_2}{S_1}=1-p(1-r)-q(1-p)-r(1-q)$$

$$=1-p-q-r+pq+qr+rp$$ …[答]

(4) (1) より $p=q=r$ であるから

$$\frac{S_2}{S_1}=1-3p+3p^2$$

$$=3\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$0<p<1$ より $p=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。 …[答]

高松高等予備校

数学　２０１　その４

(1)　$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ であり，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を用いて θ を消去すると

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1 \quad \cdots\cdots①$$

したがって，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ より曲線 C は楕円①のすべての点を表す。

よって，x 軸との交点は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$，y 軸との交点は $(0,\ \pm\sqrt{3})$ …[答]

(2)　$x-y=k$ とする。

これが楕円①と共有点を持つような k の値の範囲を求めればよい。

①より

$$3x^2+2y^2=6$$

$x-y=k$ すなわち $y=x-k$ を用いて y を消去すると

$$3x^2+2(x-k)^2=6$$

整理すると

$$5x^2-4kx+2k^2-6=0 \quad \cdots\cdots②$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4k^2-5(2k^2-6)\geqq0$$

よって

$$k^2-5\leqq0$$

より

$$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$$

また，接点の x 座標は②の重解だから

$$x=\frac{2k}{5}$$

このとき

$$y=x-k=-\frac{3}{5}k$$

以上より

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad y=-\frac{3\sqrt{5}}{5}\ \text{のとき最大値}\ \sqrt{5}$$

$x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $y=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$ …[答]

(3)　$z=(x+y)(x-y)$ とする。

$$z=x^2-y^2$$
$$=x^2-\left(3-\frac{3}{2}x^2\right) \quad \left(\because \quad ①より\ y^2=3-\frac{3}{2}x^2\right)$$
$$=\frac{5}{2}x^2-3$$

$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ であるから，z は $x=\pm\sqrt{2}$ のとき最大となり，$x=0$ のとき最小となる。

①より $x=\pm\sqrt{2}$ のとき $y=0$ であり，$x=0$ のとき $y=\pm\sqrt{3}$ であるから

$x=\pm\sqrt{2}$ ， $y=0$ のとき最大値 2

$x=0$ ， $y=\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -3 …[答]

高松高等予備校