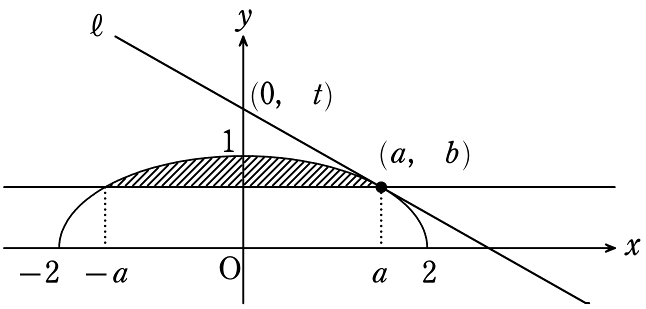
数学　２０２　その１

(1)



$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$\frac{ax}{4}+by=1 \qquad \cdots①$$

x 軸との交点は $y=0$ として　$x=\dfrac{4}{a}$

y 軸との交点は $x=0$ として　$y=\dfrac{1}{b}$

ゆえに

$$S_1(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{2}{ab}$$

ところで ① は $(0,\ t)$ を通るから $bt=1$　よって　$b=\dfrac{1}{t}$

点 $(a,\ b)$ は $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点であるから

$$\frac{a^2}{4}+b^2=1$$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{1}{t^2}=1$$

$$a^2=\frac{4(t^2-1)}{t^2}$$

$a>0$，$t>1$ より　$a=\dfrac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$

したがって

$$S_1(t)=\frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}$$

ここで $t^2=p$ とおき $f(p)=\dfrac{p}{\sqrt{p-1}}$ とおくと

$p>1$ において

$$f'(p)=\frac{\sqrt{p-1}-\dfrac{p}{2\sqrt{p-1}}}{p-1}$$

$$=\frac{2(p-1)-p}{2(p-1)\sqrt{p-1}}$$

$$=\frac{p-2}{2(p-1)\sqrt{p-1}}$$

$p>1$ における $f(p)$ の増減表は次のとおり

p	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(p)$		$-$	0	$+$
$f(p)$		↘	極小	↗

$f(p)$ は $p=2$ のとき最小となる

このとき $S_1(t)$ も最小である

$p=2$ のとき $f(p)=2$

よって　$S_1(t)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき最小値 2 をとる　…[答]

(2)　$$S_2(t)=\int_{-a}^{a}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-b\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-b\right)dx$$

$$=\int_{0}^{a}\sqrt{4-x^2}\,dx-2b\Big[x\Big]_0^a$$

$$=\int_{0}^{a}\sqrt{4-x^2}\,dx-2ab$$

$$S_2'(t)=\sqrt{4-a^2}\cdot\frac{da}{dt}-2\left(\frac{da}{dt}\cdot b+a\cdot\frac{db}{dt}\right)$$

ところで $\sqrt{4-a^2}=2b$ から

$$S_2'(t)=2b\cdot\frac{da}{dt}-2b\cdot\frac{da}{dt}-2a\cdot\frac{db}{dt}=-2a\cdot\frac{db}{dt}$$

ここで　$a=\dfrac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$，$b=\dfrac{1}{t}$ から $\dfrac{db}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$ であるから

$$S_2'(t)=-2\cdot\frac{2\sqrt{t^2-1}}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{4\sqrt{t^2-1}}{t^3}$$

$g(t)=\dfrac{4\sqrt{t^2-1}}{t^3}$ とおくとき $t>1$ において

$$g'(t)=\frac{4\left(\dfrac{t^4}{\sqrt{t^2-1}}-3t^2\sqrt{t^2-1}\right)}{t^6}$$

$$=\frac{4(t^2-3t^2+3)}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\frac{-4(2t^2-3)}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\frac{-4(\sqrt{2}\,t+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,t-\sqrt{3})}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

$t>1$ における増減表は次のとおり

t	1	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき $g(t)$ つまり $S_2'(t)$ は最大となり，最大値は

$$g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{4\sqrt{\dfrac{3}{2}-1}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}}=\frac{4}{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9} \quad \cdots[答]$$

高松高等予備校

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1)　△OAB，△PQR の重心をそれぞれ $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-q)\vec{a}+q\vec{b}\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-r)\vec{b}$$

だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3}\\&=\frac{p\vec{a}+(1-q)\vec{a}+q\vec{b}+(1-r)\vec{b}}{3}\\&=\frac{(p-q+1)\vec{a}+(q-r+1)\vec{b}}{3}\end{aligned}$$

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，$\mathrm{G_1}$ と $\mathrm{G_2}$ が一致するための条件は

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}=\dfrac{p-q+1}{3}\\[2mm]\dfrac{1}{3}=\dfrac{q-r+1}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}p=q\\q=r\end{cases}\iff p=q=r$$

ゆえに

$$p:q:r=1:1:1$$ …[答]

(2)　$p\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$，$q\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$，$r\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{p}{p-(1-p)}\vec{a}=\frac{p}{2p-1}\vec{a}\,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=\frac{-(1-q)\vec{a}+q\vec{b}}{q-(1-q)}=\frac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1}\,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=\frac{-(1-r)}{r-(1-r)}\vec{b}=\frac{r-1}{2r-1}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P'R'}}$ は平行ではないから，△P′Q′R′ は存在し，その重心を $\mathrm{G_3}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_3}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}+\overrightarrow{\mathrm{OR'}}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{p}{2p-1}\vec{a}+\frac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}\vec{b}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{p}{2p-1}+\frac{q-1}{2q-1}\right)\vec{a}+\left(\frac{q}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}\right)\vec{b}\right\}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，(1) の G_1 と G_3 が一致するための条件は

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{2p-1}+\dfrac{q-1}{2q-1}\right) & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{q}{2q-1}+\dfrac{r-1}{2r-1}\right) & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より

$$1=\frac{p}{2p-1}+\frac{q-1}{2q-1}$$

両辺に $(2p-1)(2q-1)$ をかけると

$$(2p-1)(2q-1)=p(2q-1)+(q-1)(2p-1)$$
$$4pq-2p-2q+1=2pq-p+2pq-q-2p+1$$

ゆえに

$$p=q$$

②についても同様に計算すると

$$q=r$$

が得られる。

したがって

$$p=q=r$$

であるから，(1) より△OAB と △PQR の重心は一致する。　[終]

(3)　$$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$$
$$=\frac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1}-\frac{p}{2p-1}\vec{a}$$
$$=\left(\frac{q-1}{2q-1}-\frac{p}{2p-1}\right)\vec{a}+\frac{q}{2q-1}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P'R'}}=\overrightarrow{\mathrm{OR'}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$$
$$=\frac{r-1}{2r-1}\vec{b}-\frac{p}{2p-1}\vec{a}$$
$$=\frac{-p}{2p-1}\vec{a}+\frac{r-1}{2r-1}\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P'R'}}$ が平行であるとき

$$\left(\frac{q-1}{2q-1}-\frac{p}{2p-1}\right):\frac{-p}{2p-1}=\frac{q}{2q-1}:\frac{r-1}{2r-1}$$

$$\left(\frac{q-1}{2q-1}-\frac{p}{2p-1}\right)\cdot\frac{r-1}{2r-1}=\frac{-p}{2p-1}\cdot\frac{q}{2q-1}$$

両辺に $(2p-1)(2q-1)(2r-1)$ をかけると

$$\{(q-1)(2p-1)-p(2q-1)\}(r-1)=-pq(2r-1)$$

$$(2pq-q-2p+1-2pq+p)(r-1)=-2pqr+pq$$

$$(-p-q+1)(r-1)+2pqr-pq=0$$

ゆえに

$$2pqr+p+q+r=pq+qr+rp+1$$

[終]

高松高等予備校

(1)　$P(x)$ が整数値整式ならば

$$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(-1)=a-b+c$$ は整数である。

よって

$$m_0=c,\ m_1=a+b+c-m_0=a+b$$

$m_2=a-b+c-m_0+m_1=2a$ とおくと，m_0，m_1，m_2 は整数である。

このとき，

$$\begin{aligned} m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x) &= c+(a+b)x+2a\cdot\frac{1}{2}x(x-1) \\ &= ax^2+bx+c \\ &= P(x) \end{aligned}$$

であるから，(A) は成り立つ。

逆に (A) が成り立つとき，x が整数ならば $f_1(x)$ は整数であり，

$x(x-1)$は連続 2 整数の積より偶数だから，$f_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x-1)$ も整数

である。よって $P(x)=m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)$ は整数値整式である。

以上より (A) は必要十分条件である。　[終]

(2)　$P(x)$ が整数値整式ならば

$$P(0)=d,\ P(1)=a+b+c+d,\ P(2)=8a+4b+2c+d,$$
$$P(-1)=-a+b-c+d$$

は整数である。

$$\therefore\quad m_0=d,$$
$$m_1=(a+b+c+d)-m_0=a+b+c,$$
$$m_2=(8a+4b+2c+d)-(m_0+2m_1)=6a+2b,$$
$$m_3=m_0-m_1+m_2-(-a+b-c+d)=6a$$

とおくと，m_0，m_1，m_2，m_3 は整数である。このとき，

$$\begin{aligned} & m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)+m_3f_3(x) \\ &= d+(a+b+c)x+(6a+2b)\cdot\frac{x(x-1)}{2}+6a\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= ax^3+bx^2+cx+d \\ &= P(x) \end{aligned}$$

ゆえに，(B) は成り立つ。

逆に，(B) が成り立つとき，x が整数ならば，$f_1(x)=x$，

$f_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x-1)$ は整数で，$x(x-1)(x-2)$ は連続 3 整数の積より

$f_3(x)=\dfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ も整数である。

よって，$P(x)$ は整数であり，$P(x)$ は整数値整式である。

以上より (B) は必要十分条件である。 [終]

高松高等予備校

数学　２０２　その４

(1)　P_0 は最初袋 A から白玉 2 つを取り出す確率だから

$$P_0=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1}{2}$$ …[答]

赤玉が袋 A にある状態を a，赤玉が袋 B にある状態を b とすると
a の次に b となる確率 p は題意より

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

$$\overline{p}=1-p=\frac{7}{9}$$

b の次に a となる確率 q は

$$q=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\overline{q}=1-q=\frac{2}{3}$$

よって

$$P_1=P_0\,\overline{p}+(1-P_0)\,q=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$$ …[答]

(2)　題意と(1)の考察より

$$P_{n+1}=P_n\overline{p}+(1-P_n)q$$
$$=\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)P_n+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{4}{9}P_n+\frac{1}{3}$$

だから

$$P_{n+1}-\frac{3}{5}=\frac{4}{9}\left(P_n-\frac{3}{5}\right)$$

これと $P_0=\frac{1}{2}$ より

$$P_n-\frac{3}{5}=\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

よって

$$P_n=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$ …[答]

(3)　a の状態から始めて k 回後に a となる確率を R_k

b の状態から始めて k 回後に a となる確率を S_k とおくと
(2)の結果より

$$P_n=\frac{1}{2}(R_n+S_n)=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \cdots①$$

また

$$R_{k+1}=\overline{p}R_k+pS_k=\frac{7}{9}R_k+\frac{2}{9}S_k$$

$$S_{k+1}=qR_k+\overline{q}S_k=\frac{1}{3}R_k+\frac{2}{3}S_k$$

だから

$$\frac{1}{2}(R_{k+1}+S_{k+1})=\frac{1}{2}(R_k+S_k)+\frac{1}{18}(R_k-S_k)$$

よって①より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(R_k-S_k)&=9\left\{\frac{1}{2}(R_{k+1}+S_{k+1})-\frac{1}{2}(R_k+S_k)\right\}\\&=\frac{9}{10}\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^k-\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}\right\}\\&=\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^k \quad \cdots②\end{aligned}$$

①，②より

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n\\&=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\end{aligned}$$

以上より，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{R_n}{R_n+S_n}&=\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n}{2\left\{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}}\\&=\frac{3\cdot9^n+2\cdot4^n}{6\cdot9^n-4^n}\end{aligned}$$

…[答]