

[1]

(1) 点 M は辺 BC の中点だから

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots[\text{答}]$$

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{a}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{n}{n+m}\vec{b}$

PR : RQ = s : (1-s)とおくと

$$\overrightarrow{AR} = (1-s)\overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{AQ} = (1-s)\frac{m}{m+n}\vec{a} + s\frac{n}{n+m}\vec{b} \quad \dots\textcircled{1}$$

点 R は直線 AM 上にあるから

$$\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} \quad \dots\textcircled{2}$$

①, ②において $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ だから

$$\begin{cases} (1-s)\frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}t \\ s\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

これらを解くと

$$s = \frac{m}{m+n}, \quad t = \frac{2mn}{(m+n)^2}$$

よって, $\overrightarrow{AR} = \frac{mn}{(m+n)^2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots[\text{答}]$

(3) (2)より $\overrightarrow{AR} = \frac{2mn}{(m+n)^2}\overrightarrow{AM}$ だから

$$\frac{AR}{AM} = \frac{2mn}{(m+n)^2} \quad \dots[\text{答}]$$

線分 PQ が $\triangle ABC$ の重心を通ると仮定すると(2)で求めた R が重心で

あり, このとき $\frac{AR}{AM} = \frac{2}{3}$

すなわち $\frac{2mn}{(m+n)^2} = \frac{2}{3}$ となる $m > 0$, $n > 0$ の実数 m , n が存在する。

$$3mn = (m+n)^2$$

$$m^2 - mn + n^2 = 0$$

$$\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = 0$$

m , n が実数のとき $m = n = 0$

これは $m > 0$, $n > 0$ に矛盾する。

したがって、線分 PQ は三角形 ABC の重心を通らない。 …[答]

高松高等予備校

[2]

(1) 点 P が原点 O に一致するとき

$$\cos \theta = 0 \text{ かつ } \sin 2\theta = 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } \cos \theta = 0 \text{ から, } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq 2\theta < 4\pi \text{ より, } \sin 2\theta = 0 \text{ から, } 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$\text{すなわち } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \dots \textcircled{2}$$

①, ②の共通解は

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots [\text{答}]$$

(2) 点 P が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の円周上にあるから

$$\cos^2 \theta + \sin^2 2\theta = 1$$

$$1 - \sin^2 \theta + (2\sin \theta \cos \theta)^2 = 1$$

$$-\sin^2 \theta + 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0$$

$$\sin^2 \theta (2\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = 0 \text{ または } \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \dots [\text{答}]$$

(3) $OP^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 2\theta$

$$= 1 - \sin^2 \theta + 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \sin^2 \theta + 4\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

$$= -4\sin^4 \theta + 3\sin^2 \theta + 1$$

$t = \sin^2 \theta$ とおくと

$$OP^2 = -4t^2 + 3t + 1 \quad (0 \leq t \leq 1) \dots [\text{答}]$$

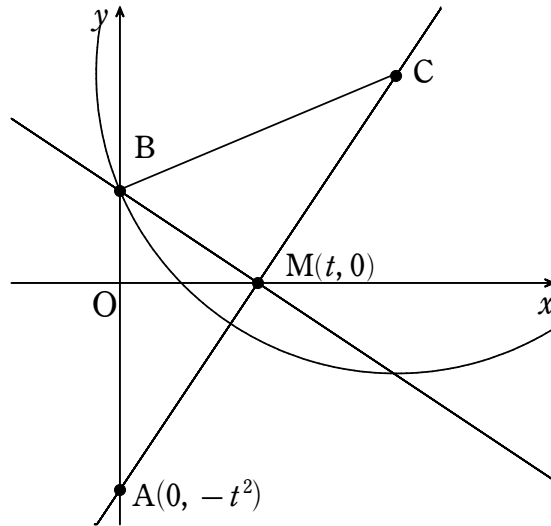
(4) $OP^2 = -4t^2 + 3t + 1$

$$= -4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}$$

$0 \leq t \leq 1$ だから

OP は $t = \frac{3}{8}$ のとき, 最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

[3]



(1)

$BA = BC$, $BM \perp AM$ より, 点 M は AC の中点である
よって

$$C(2t, t^2)$$

…[答]

(2)

点 M を通り AM に垂直な直線の方程式は

$$t \neq 0 \text{ より } y = -\frac{1}{t}(x - t)$$

よって, 点 $B(0, 1)$ である

求める円の半径は $BC = BA = 1 + t^2$ より

$$(x - 2t)^2 + (y - t^2)^2 = (t^2 + 1)^2$$

…[答]

(3)

(2) で求めた円上の点で, y 座標が最小となるのは,
直線 $x = 2t$ との交点で求められるので

$$y = t^2 \pm (t^2 + 1)$$

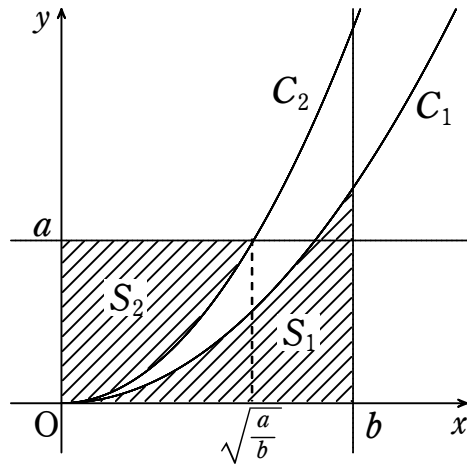
よって, y 座標が最小となる点は

$$(2t, -1)$$

…[答]

[4]

(1)



図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^b ax^2 dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^b \\ &= \frac{1}{3} ab^3 \end{aligned}$$

…[答]

C_2 において、 $y=a$ とすると、 $0 < a < b$ 、 $x \geq 0$ より $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

$$\begin{aligned} S_2 &= a \times \sqrt{\frac{a}{b}} - \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} bx^2 dx \\ &= a \sqrt{\frac{a}{b}} - \left[\frac{b}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ &= \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

…[答]

(2)

(1)より $S_1 = S_2$ のとき

$$\frac{1}{3} ab^3 = \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$a > 0$ より

$$b^3 = 2 \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b^6 = \frac{4a}{b}$$

$$a = \frac{b^7}{4}$$

…[答]

(3)

(2)より $S_1 = S_2 = \frac{b^{10}}{12}$ のとき

$$P_1\left(b, \frac{b^9}{4}\right), P_2\left(\frac{b^3}{2}, \frac{b^7}{4}\right)$$

ここで $a < b^3$ より

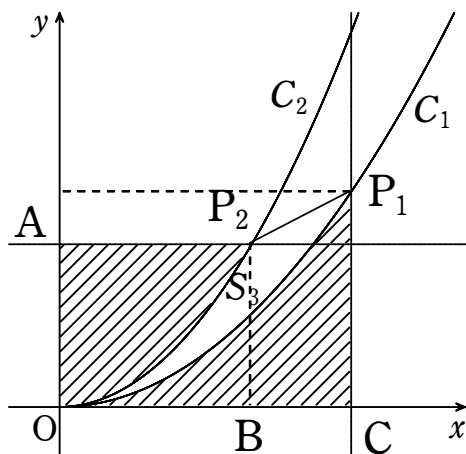
$$\frac{b^7}{4} < b^3$$

$b > 0$ より

$$\frac{b^4}{4} < 1$$

$$\frac{b^2}{2} < 1$$

$$\frac{b^3}{2} < b$$



図より

$$S_3 = (\text{長方形AOBP}_2) + (\text{台形BCP}_1\text{P}_2) - (S_1 + S_2)$$

$$= \frac{b^3}{2} \cdot \frac{b^7}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^7}{4} + \frac{b^9}{4} \right) \left(b - \frac{b^3}{2} \right) - 2S_1$$

$$= -\frac{1}{16}b^{12} + \frac{1}{48}b^{10} + \frac{1}{8}b^8$$

…[答]

(4)

(3)より $S_1 = S_2 = S_3$ のとき

$$-\frac{1}{16}b^{12} + \frac{1}{48}b^{10} + \frac{1}{8}b^8 = \frac{b^{10}}{12}$$

$b > 0$ より

$$b^4 + b^2 - 2 = 0$$

$$(b^2 + 2)(b^2 - 1) = 0$$

$$b = 1$$

よって

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1$$

…[答]

高松高等予備校