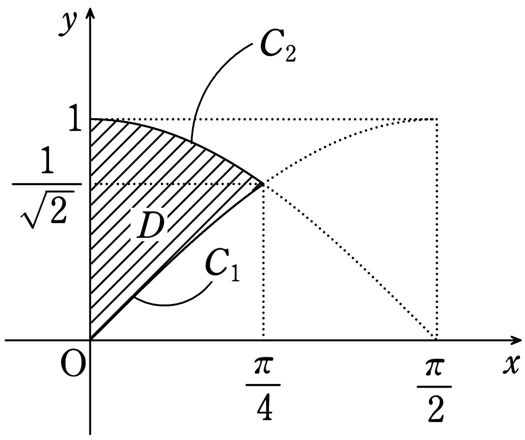
[1]

C_1 : $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

C_2 : $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$



(1)　D の面積を S とする。

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

…[答]

(2)　$I_1(x)=\int x\sin x\,dx$，$I_2(x)=\int x\cos x\,dx$ とし，K_1，K_2 を積分定数とする。

$$I_1(x)=\int x\,(-\cos x)'dx$$
$$=-x\cos x+\int x'\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\int \cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+K_1$$

…[答]

$$I_2(x)=\int x\,(\sin x)'dx$$
$$=x\sin x-\int x'\sin x\,dx$$
$$=x\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+K_2$$

…[答]

(3)　$I_3(x)=\int x^2\sin x\,dx$，$I_4(x)=\int x^2\cos x\,dx$ とし，K_3，K_4 を積分定数

とする。

$$I_3(x)=\int x^2(-\cos x)'dx$$
$$=-x^2\cos x+\int (x^2)'\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2I_2(x)$$
$$=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+K_2)\ (\because\ (2)\text{ より })$$

$2K_2=K_3$ として

$$I_3(x)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+K_3 \qquad \cdots[\text{答}]$$

$$I_4(x)=\int x^2(\sin x)'dx$$
$$=x^2\sin x-\int (x^2)'\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x-2I_1(x)$$
$$=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+K_1)\ (\because\ (2)\text{ より})$$

$-2K_1=K_4$ として

$$I_4(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+K_4 \qquad \cdots[\text{答}]$$

(4)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dy+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2dy$$

$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dy$ ，$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2dy$ とおく。

V_1 において，$0\leqq y\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$y=\sin x$ より $dy=\cos x\,dx$

y	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
x	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos x\,dx$$

$$=\left[I_4(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=I_4\left(\frac{\pi}{4}\right)-I_4(0)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\sqrt{2}$$

V_2 において，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq y\leqq 1$ のとき，

$y=\cos x$ より $dy=-\sin x\,dx$

y	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \to\ 1$
x	$\frac{\pi}{4}\ \to\ 0$

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}x^2(-\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$

$$=\left[I_3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=I_3\left(\frac{\pi}{4}\right)-I_3(0)$$

$$=-\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}-2$$

だから

$$\frac{V}{\pi}=\frac{V_1}{\pi}+\frac{V_2}{\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-2$$

$\therefore\quad V=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1) $$f(x)=\frac{1}{3}(x^3+3x^2-x-2)$$
$$=\frac{1}{3}(x^3+3x^2+2x-3x-2)$$
$$=\frac{1}{3}x(x+1)(x+2)-x-\frac{2}{3}$$

x を整数とすると，$x(x+1)(x+2)$ は連続する 3 整数の積なので 3 の倍数であり，$\frac{1}{3}x(x+1)(x+2)-x$ は整数となり，$f(x)$ は整数でない。

よって，$y=f(x)$ のグラフ上には格子点が存在しない。　[証明終]

(2) $$f'(x)=x^2+2x-\frac{1}{3}$$

$(n,\ f(n))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=f'(n)(x-n)+f(n)$$
$$=f'(n)(x-n)-\frac{2}{3}+f(n)+\frac{2}{3} \quad \cdots ①$$

(1) より $f(n)+\frac{2}{3}$ は整数である。

$g(x)=f'(n)(x-n)-\frac{2}{3}$ とすると

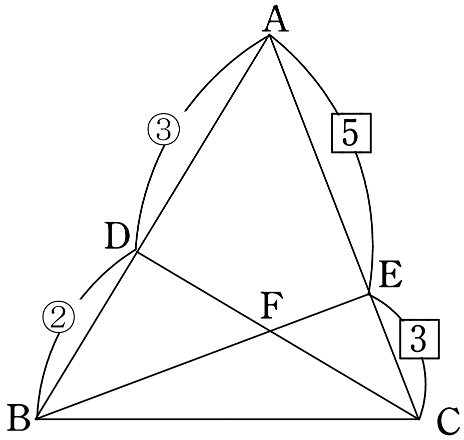
$$g(x)=\left(n^2+2n-\frac{1}{3}\right)(x-n)-\frac{2}{3}$$
$$=(n^2+2n)(x-n)-\frac{1}{3}(x-n+2)$$

整数 k に対して，$x=n+3k+1$ とすると，x は整数であり，
$g(x)$ は整数となるので，① の y も整数となる。
よって，直線 ℓ 上には無限に多くの格子点が存在する。　[証明終]

高松高等予備校

[3]

(1)



△ACD と直線 BE において，メネラウスの定理より

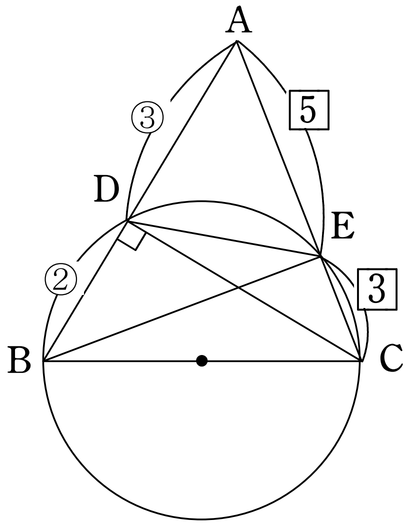
$$\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DB}{BA}\cdot\frac{AE}{EC}=1 \quad すなわち \quad \frac{CF}{FD}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}=1$$

したがって

$$\frac{CF}{FD}=\frac{3}{2}$$

よって　CF : FD=3 : 2　…[答]

(2)



AB=x，AC=y ($x>0$，$y>0$) とおくと

$$AD=\frac{3}{5}x,\quad AE=\frac{5}{8}y$$

方べきの定理より

$$AD\cdot AB=AE\cdot AC \quad すなわち \quad \frac{3}{5}x^2=\frac{5}{8}y^2$$

したがって　$\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{25}{24}$

$x>0$，$y>0$ より　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

よって　AB：AC$=5:2\sqrt{6}$ …[答]

円の中心が辺 BC 上にあるとき，線分 BC は直径であり

$$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$$

△ACD で三平方の定理より

$$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AD}^2=y^2-\left(\frac{3}{5}x\right)^2=y^2-\frac{9}{25}x^2$$

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$ より $y=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x$ であるから

$$\mathrm{CD}^2=\frac{24}{25}x^2-\frac{9}{25}x^2=\frac{15}{25}x^2$$

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\left(\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{15}{25}x^2=\frac{19}{25}x^2$$

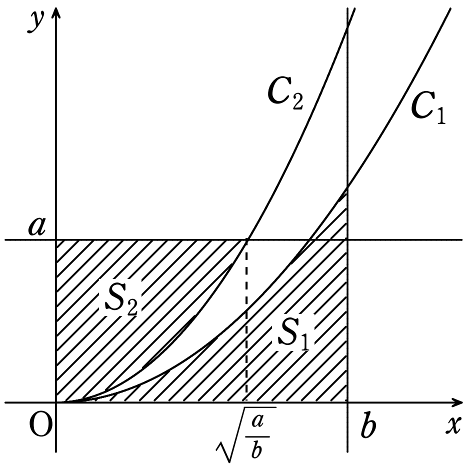
したがって　$\mathrm{BC}=\dfrac{\sqrt{19}}{5}x$

よって　AB：AC：BC $=x:\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x:\dfrac{\sqrt{19}}{5}x=5:2\sqrt{6}:\sqrt{19}$ …[答]

高松高等予備校

[4]

(1)



図より

$$S_1=\int_0^b ax^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^b$$

$$=\frac{1}{3}ab^3$$ …[答]

C_2 において，$y=a$ とすると，$0<a<b$，$x\geqq 0$ より $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$S_2=a\times\sqrt{\frac{a}{b}}-\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} bx^2dx$$

$$=a\sqrt{\frac{a}{b}}-\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{b}}$$ …[答]

(2)

(1)より $S_1=S_2$ のとき

$$\frac{1}{3}ab^3=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$a>0$より

$$b^3=2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b^6=\frac{4a}{b}$$

$a=\dfrac{b^7}{4}$ …[答]

(3)

(2)より $S_1=S_2=\dfrac{b^{10}}{12}$ のとき

$$\mathrm{P}_1\left(b,\ \frac{b^9}{4}\right),\ \ \mathrm{P}_2\left(\frac{b^3}{2},\ \frac{b^7}{4}\right)$$

ここで $a<b^3$ より

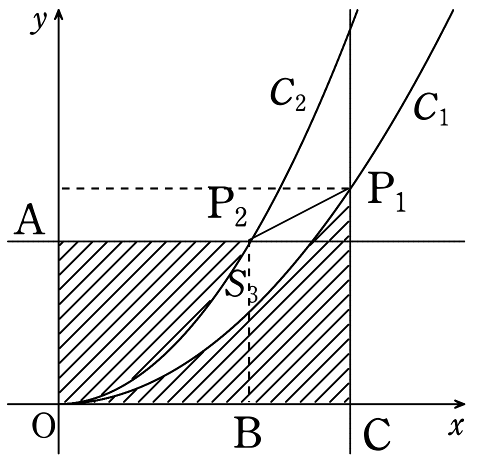
$$\frac{b^7}{4}<b^3$$

$b>0$ より

$$\frac{b^4}{4}<1$$

$$\frac{b^2}{2}<1$$

$$\frac{b^3}{2}<b$$



図より

$$S_3=(\text{長方形AOBP}_2)+(\text{台形BCP}_1\text{P}_2)-(S_1+S_2)$$

$$=\frac{b^3}{2}\cdot\frac{b^7}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{b^7}{4}+\frac{b^9}{4}\right)\left(b-\frac{b^3}{2}\right)-2S_1$$

$$=-\frac{1}{16}b^{12}+\frac{1}{48}b^{10}+\frac{1}{8}b^8$$ …[答]

(4)

(3)より $S_1=S_2=S_3$ のとき

$$-\frac{1}{16}b^{12}+\frac{1}{48}b^{10}+\frac{1}{8}b^8=\frac{b^{10}}{12}$$

$b>0$ より

$$b^4+b^2-2=0$$

$$(b^2+2)(b^2-1)=0$$

$$b=1$$

よって

$$a=\frac{1}{4},\ \ b=1$$ …[答]