[1]

(1)　点 M は辺 BC の中点だから

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ …[答]

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{n}{n+m}\vec{b}$

PR：RQ$=s$ ： $(1-s)$とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-s)\dfrac{m}{m+n}\vec{a}+s\dfrac{n}{n+m}\vec{b}$ …①

点 R は直線 AM 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}t\,\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\,\vec{b}$ …②

①，②において $\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$だから

$$\begin{cases}(1-s)\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{1}{2}t\\ s\dfrac{n}{n+m}=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

これらを解くと

$s=\dfrac{m}{m+n}$，$t=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{mn}{(m+n)^2}(\vec{a}+\vec{b})$ …[答]

(3)　(2)より　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ だから

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$ …[答]

線分 PQ が △ABC の重心を通ると仮定すると(2)で求めた R が重心であり，このとき　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}$

すなわち $\dfrac{2mn}{(m+n)^2}=\dfrac{2}{3}$となる $m>0$，$n>0$ の実数 m，n が存在する。

$$3mn=(m+n)^2$$

$$m^2-mn+n^2=0$$

$$\left(m-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2=0$$

m，n が実数のとき　$m=n=0$

これは $m>0$，$n>0$ に矛盾する。
したがって，線分 PQ は三角形 ABC の重心を通らない。　　　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　点 P が原点 O に一致するとき

$\cos\theta=0$ かつ $\sin 2\theta=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\cos\theta=0$ から，$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$　…①

$0\leqq 2\theta<4\pi$ より，$\sin 2\theta=0$ から，$2\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

すなわち $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$　…②

①，②の共通解は

$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$　…[答]

(2)　点 P が単位円 $x^2+y^2=1$ の円周上にあるから

$$\cos^2\theta+\sin^2 2\theta=1$$
$$1-\sin^2\theta+(2\sin\theta\cos\theta)^2=1$$
$$-\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta=0$$
$$\sin^2\theta(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$$
$$\sin\theta=0 \text{ または } \cos\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$　…[答]

(3)　$\mathrm{OP}^2=\cos^2\theta+\sin^2 2\theta$

$$=1-\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-\sin^2\theta+4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1$$

$t=\sin^2\theta$ とおくと

$\mathrm{OP}^2=-4t^2+3t+1$　$(0\leqq t\leqq 1)$　…[答]

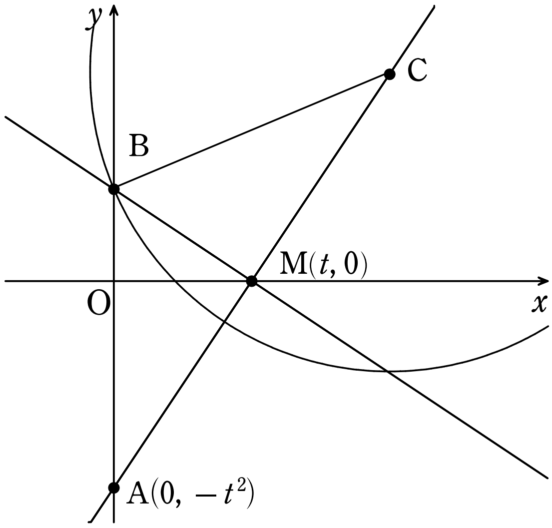
(4)　$\mathrm{OP}^2=-4t^2+3t+1$

$$=-4\left(t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{25}{16}$$

$0\leqq t\leqq 1$ だから

OP は $t=\dfrac{3}{8}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

[3]



(1)

BA＝BC， BM⊥AM より，点MはACの中点である

よって

$C\,(2t,\ t^2)$ …[答]

(2)

点Mを通りAMに垂直な直線の方程式は

$t \fallingdotseq 0$ より $y=-\dfrac{1}{t}(x-t)$

よって，点 $B\,(0,\ 1)$ である

求める円の半径は $BC=BA=1+t^2$ より

$(x-2t)^2+(y-t^2)^2=(t^2+1)^2$ …[答]

(3)

(2)で求めた円上の点で，y座標が最小となるのは，

直線 $x=2t$ との交点で求められるので

$y=t^2\pm(t^2+1)$

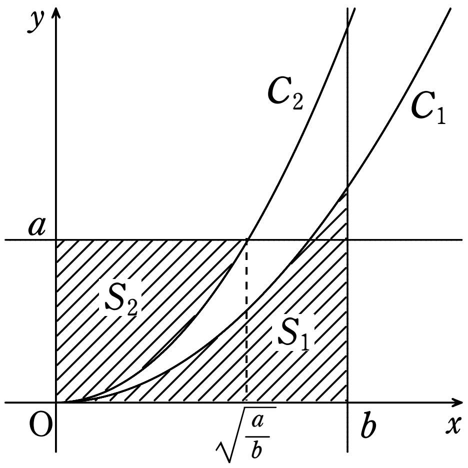
よって，y座標が最小となる点は

$(2t,\ -1)$ …[答]

高松高等予備校

[4]

(1)



図より

$$S_1=\int_0^b ax^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^b$$

$$=\frac{1}{3}ab^3 \quad \cdots[答]$$

C_2 において，$y=a$ とすると，$0<a<b$，$x\geqq 0$ より $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$$S_2=a\times\sqrt{\frac{a}{b}}-\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} bx^2dx$$

$$=a\sqrt{\frac{a}{b}}-\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \cdots[答]$$

(2)

(1)より $S_1=S_2$ のとき

$$\frac{1}{3}ab^3=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$a>0$ より

$$b^3=2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b^6=\frac{4a}{b}$$

$$a=\frac{b^7}{4}$$ …[答]

(3)

(2)より $S_1=S_2=\dfrac{b^{10}}{12}$ のとき

$$\mathrm{P}_1\left(b,\frac{b^9}{4}\right),\ \ \mathrm{P}_2\left(\frac{b^3}{2},\frac{b^7}{4}\right)$$

ここで $a<b^3$ より

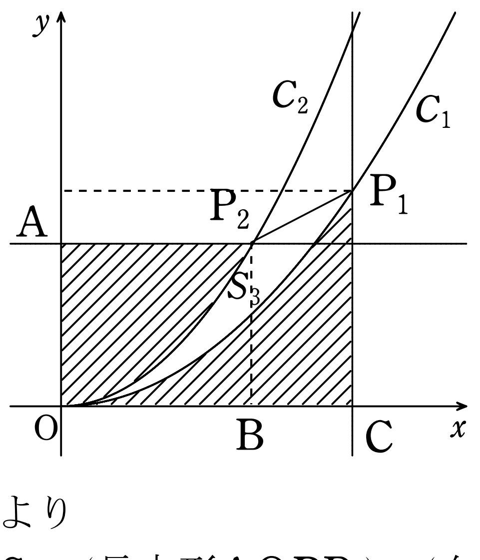
$$\frac{b^7}{4}<b^3$$

$b>0$ より

$$\frac{b^4}{4}<1$$

$$\frac{b^2}{2}<1$$

$$\frac{b^3}{2}<b$$



図より

$$S_3=(\text{長方形AOBP}_2)+(\text{台形BCP}_1\mathrm{P}_2)-(S_1+S_2)$$

$$=\frac{b^3}{2}\cdot\frac{b^7}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{b^7}{4}+\frac{b^9}{4}\right)\left(b-\frac{b^3}{2}\right)-2S_1$$

$$=-\frac{1}{16}b^{12}+\frac{1}{48}b^{10}+\frac{1}{8}b^8$$ …[答]

(4)

(3)より $S_1=S_2=S_3$ のとき

$$-\frac{1}{16}b^{12}+\frac{1}{48}b^{10}+\frac{1}{8}b^{8}=\frac{b^{10}}{12}$$

$b>0$ より

$$b^4+b^2-2=0$$

$$(b^2+2)(b^2-1)=0$$

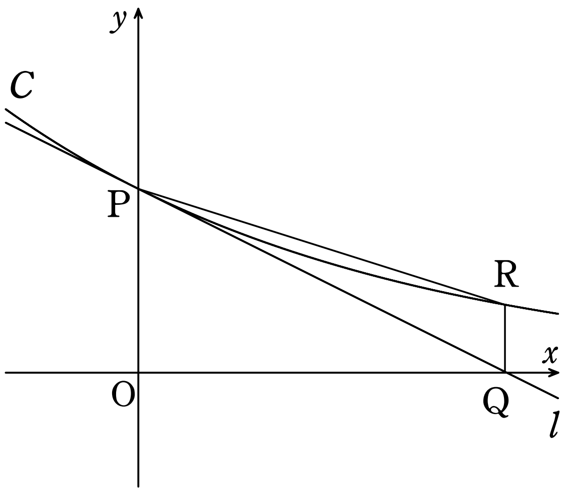
$$b=1$$

よって

$$a=\frac{1}{4}\,,\quad b=1$$ …[答]

高松高等予備校

[5]



(1)

$y=e^{-ax}$ より

$y'=-ae^{-ax}$　…①

よって点P(0, 1)における接線 l は

$l: y-1=-a(x-0)$

$y=-ax+1$　…[答]

(2)

(1)より

$0=-ax+1$

$x=\dfrac{1}{a}$

よって

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$　…[答]

(3)

①より

$y''=a^2e^{-ax}>0$

したがって，曲線 C は下に凸である。

よって

$(\triangle\mathrm{OPQ})<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} e^{-ax}dx<$(台形OPRQ)

だから

$S_1<\left[-\dfrac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}<S_2$

ゆえに

$S_1 < \dfrac{1}{a}(1-e^{-1}) < S_2$ [証明終]

高松高等予備校