[1]

(1)　点 M は辺 BC の中点だから

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ …[答]

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m}{m+n}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{n}{n+m}\vec{b}$

PR : RQ $=s$ ： $(1-s)$とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-s)\frac{m}{m+n}\vec{a}+s\frac{n}{n+m}\vec{b}$ …①

点 R は直線 AM 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}t\,\vec{a}+\frac{1}{2}t\,\vec{b}$ …②

①，②において $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$だから

$$\begin{cases}(1-s)\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{1}{2}t\\ s\dfrac{n}{n+m}=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

これらを解くと

$s=\frac{m}{m+n}$，$t=\frac{2mn}{(m+n)^2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{mn}{(m+n)^2}(\vec{a}+\vec{b})$ …[答]

(3)　(2)より　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ だから

$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$ …[答]

線分 PQ が △ABC の重心を通ると仮定すると(2)で求めた R が重心であり，このとき　$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}$

すなわち $\frac{2mn}{(m+n)^2}=\frac{2}{3}$となる $m>0$，$n>0$ の実数 m，n が存在する。

$$3mn=(m+n)^2$$

$$m^2-mn+n^2=0$$

$$\left(m-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2=0$$

m，n が実数のとき　$m=n=0$

これは $m>0$，$n>0$ に矛盾する。
したがって，線分 PQ は三角形 ABC の重心を通らない。 …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　第 n 群には連続する n 個の自然数が入ることから

第 n 群の最大の自然数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

したがって，自然数 29 が第 n 群に入るとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<29\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ここで，$\frac{1}{2}n(n-1)$，$\frac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加し，

$\frac{1}{2}\cdot7\cdot8=28$，$\frac{1}{2}\cdot8\cdot9=36$ であるから

$$n=8$$

よって，自然数 29 は第 8 群に入る。 …[答]

(2)　(1) より，第 n 群の最大の自然数は

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$ …[答]

$n\geqq2$ のとき，第 n 群の最小の自然数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+1=\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

第 1 群の最小の自然数は 1 であるから，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，第 n 群の最小の自然数は

$$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$ …[答]

(3)　自然数 2017 が第 n 群に入るとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<2017\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ここで，$\frac{1}{2}n(n-1)$，$\frac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加し，

$\frac{1}{2}\cdot63\cdot64=2016$，$\frac{1}{2}\cdot64\cdot65=2080$ であるから

$$n=64$$

よって，自然数 2017 は第 64 群に入る。 …[答]

高松高等予備校

[3]

a)　$\log_2 y-2x+3=0$

b)　$\log_2 y+\log_2(x^2+1)-3=0$

c)　$\log_2 y-\log_4(x^2+1)-1=0$

a)，b)，c) において真数は正であるから，$y>0$ である。

b)，c) において真数は正であるから

$x^2+1>0$

これはつねに成り立つ。

a) のとき

$$\log_2 y=2x-3$$

$$y=2^{2x-3}$$

x がすべての実数のとき

$y>0$

b) のとき

$$\log_2 y=3-\log_2(x^2+1)$$

$$=\log_2 8-\log_2(x^2+1)$$

$$=\log_2\frac{8}{x^2+1}$$

$$y=\frac{8}{x^2+1}$$

$$y'=8\cdot\left\{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}$$

$$=-\frac{16x}{(x^2+1)^2}$$

y の増減表は次のとおり

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$x=0$ のとき $y=8$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x^2+1}=0$$

よって，$0<y\leqq 8$

c) のとき

$$\log_2 y=\log_{2^2}(x^2+1)+1$$

$$=\frac{1}{2}\log_2(x^2+1)+\log_2 2$$
$$=\log_2\sqrt{x^2+1}+\log_2 2$$
$$=\log_2 2\sqrt{x^2+1}$$
$$y=2\sqrt{x^2+1}$$
$$y'=2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

y の増減表は次のとおり

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=0$ のとき $y=2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty} 2\sqrt{x^2+1}=\infty$$

よって，$y\geqq 2$

以上のことより

$a)$ のとき　$y=2^{2x-3}$，$y>0$

$b)$ のとき　$y=\dfrac{8}{x^2+1}$，$0<y\leqq 8$

$c)$ のとき　$y=2\sqrt{x^2+1}$，$y\geqq 2$

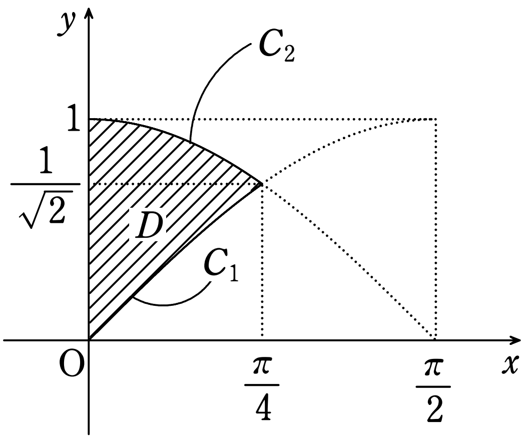
…[答]

高松高等予備校

[4]

C_1 : $y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

C_2 : $y=\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$



(1)　D の面積を S とする。

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

…[答]

(2)　$I_1(x)=\int x\sin x\,dx$，$I_2(x)=\int x\cos x\,dx$ とし，K_1，K_2 を積分定数とする。

$$I_1(x)=\int x(-\cos x)'dx$$
$$=-x\cos x+\int x'\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\int \cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+K_1$$

…[答]

$$I_2(x)=\int x(\sin x)'dx$$
$$=x\sin x-\int x'\sin x\,dx$$
$$=x\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+K_2$$

…[答]

(3)　$I_3(x)=\int x^2\sin x\,dx$，$I_4(x)=\int x^2\cos x\,dx$ とし，K_3，K_4 を積分定数

とする。

$$I_3(x)=\int x^2(-\cos x)'dx$$
$$=-x^2\cos x+\int(x^2)'\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2I_2(x)$$
$$=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+K_2)\ (\because\ (2)\text{より})$$

$2K_2=K_3$ として

$$I_3(x)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+K_3$$ …[答]

$$I_4(x)=\int x^2(\sin x)'dx$$
$$=x^2\sin x-\int(x^2)'\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x-2I_1(x)$$
$$=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+K_1)\ (\because\ (2)\text{より})$$

$-2K_1=K_4$ として

$$I_4(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+K_4$$ …[答]

(4)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2dy+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2dy$$

$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2dy$，$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2dy$ とおく。

V_1 において，$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$y=\sin x$ より $dy=\cos x\,dx$

y	$0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
x	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos x\,dx$$

$$=\Big[I_4(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=I_4\left(\frac{\pi}{4}\right)-I_4(0)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\sqrt{2}$$

V_2 において，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq y\leqq 1$ のとき，

$y=\cos x$ より $dy=-\sin x\,dx$

y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\to$	1
x	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	0

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}x^2(-\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$

$$=\Big[I_3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=I_3\left(\frac{\pi}{4}\right)-I_3(0)$$

$$=-\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}-2$$

だから

$$\frac{V}{\pi}=\frac{V_1}{\pi}+\frac{V_2}{\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-2$$

$$\therefore\quad V=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$$

…[答]