数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

1

(1)　3 つの組を区別しないので

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{6}=15\ (\text{通り})$$ …[答]

(2)　2 人，2 人の組を区別しないので

$$\frac{{}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=105\ (\text{通り})$$ …[答]

(3)　8 人から 7 人を選ぶ選び方は ${}_8C_7$ 通り

7 人を 2 人，2 人，3 人の 3 組に分ける方法は (2) より 105 通り

よって，3 組に分ける方法は ${}_8C_7\times 105$ (通り)

次に 8 人から A，B を含む 7 人の選び方は ${}_6C_5$ 通り

その 7 人をA，B を含む 3 人と 2 人，2 人の 3 組に分ける方法は

$${}_5C_1\times\frac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2}=15\ (\text{通り})$$

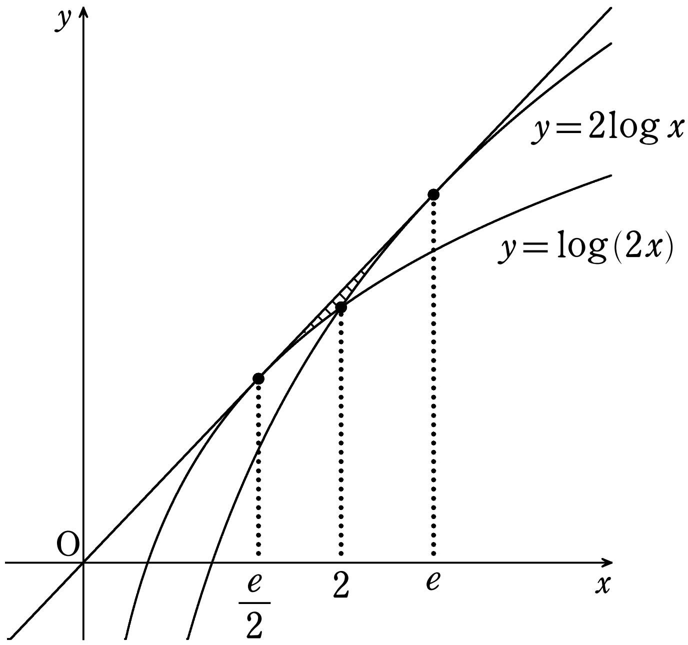
A，B の 2 人と 2 人，3 人の 3 組に分ける方法は

$${}_5C_2=10\ (\text{通り})$$

$$\therefore\quad \frac{{}_6C_5(15+10)}{{}_8C_7\times 105}=\frac{5}{28}$$ …[答]

高松高等予備校

2



真数は正なので

$2x>0$，$x>0$

すなわち $x>0$

(1)　$y=\log(2x)$ より

$$y'=\frac{1}{x}$$

C_1 上の点$(s, \log(2s))$ における C_1 の接線の方程式は

$$y-\log(2s)=\frac{1}{s}(x-s)$$

$$y=\frac{1}{s}x-1+\log(2s) \quad \cdots ①$$

また $y=2\log x$ より

$$y'=\frac{2}{x}$$

C_2 上の点$(t, 2\log t)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y-2\log t=\frac{2}{t}(x-t)$$

$$y=\frac{2}{t}x-2+2\log t \quad \cdots ②$$

①，②は一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s}=\dfrac{2}{t} \\ -1+\log(2s)=-2+2\log t \end{cases}$$

これを解くと，

$$s=\frac{e}{2},\ t=e$$

したがって，直線 l の方程式は

$$y=\frac{2}{e}x$$ …[答]

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\log(2x)=2\log x$$

$$\log 2+\log x=2\log x$$

$$\log x=\log 2$$

$$x=2 \quad (x>0\text{をみたす})$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{e}{2}}^{e}\frac{2}{e}x\,dx-\int_{\frac{e}{2}}^{2}\log(2x)\,dx-\int_{2}^{e}2\log x\,dx$$

ここで

$$\int_{\frac{e}{2}}^{e}\frac{2}{e}x\,dx=\left[\frac{1}{e}x^2\right]_{\frac{e}{2}}^{e}$$

$$=e-\frac{e}{4}$$

$$=\frac{3}{4}e$$

$$\int_{\frac{e}{2}}^{2}\log(2x)\,dx=\Big[x\log(2x)\Big]_{\frac{e}{2}}^{2}-\int_{\frac{e}{2}}^{2}x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=2\log 4-\frac{e}{2}\cdot 1-\Big[x\Big]_{\frac{e}{2}}^{2}$$

$$=\left(2\log 4-\frac{e}{2}\right)-\left(2-\frac{e}{2}\right)$$

$$=4\log 2-2$$

$$\int_{2}^{e}2\log x\,dx=2\Big[x\log x-x\Big]_{2}^{e}$$

$$=2\{(e-e)-(2\log 2-2)\}$$

$$=4-4\log 2$$

したがって

$$S=\frac{3}{4}e-(4\log 2-2)-(4-4\log 2)$$

$$=\frac{3}{4}e-2$$

…[答]

高松高等予備校

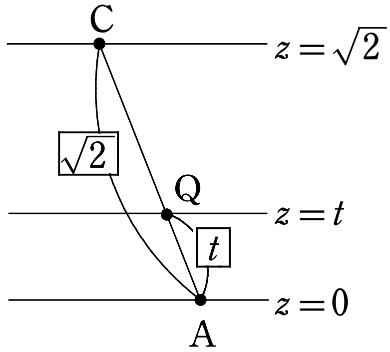
3

(1)　点 P$(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ が辺 AC と交わるから

$$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

A，Q，C の z 座標が順に $0,\ t,\ \sqrt{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{t}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



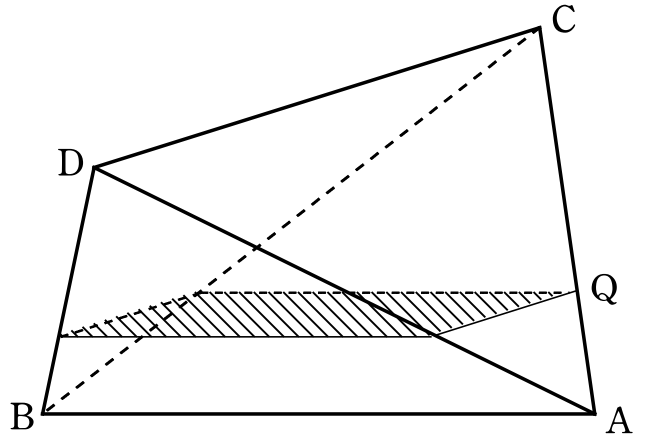
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

よって，Q の座標は　$\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$　…[答]

(2)

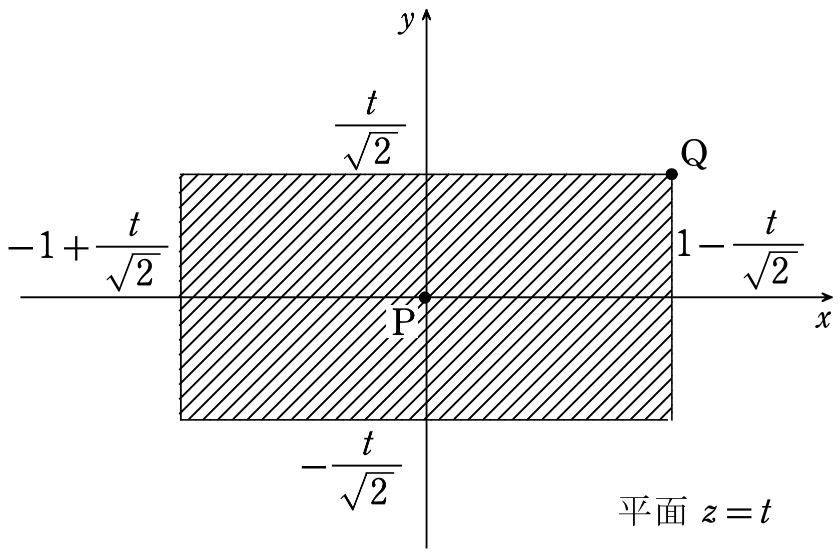


A と B は zx 平面上にあって yz 平面に関して対称である。

また，C と D は yz 平面上にあって zx 平面に関して対称である。

よって，四面体 ABCD は zx 平面と yz 平面に関して対称である。

したがって，平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ による切り口は図のような長方形である。



これを z 軸のまわりに 1 回転すると，半径 PQ の円になるから，
求める体積は

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{PQ}^2\,dt = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}dt$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} (t^2-\sqrt{2}\,t+1)\,dt$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

…[答]

高松高等予備校

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

4

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき

$$\begin{cases} z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha\,(z_{2n}-z_{2n-1}) & \cdots① \\ z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}\,(z_{2n+1}-z_{2n}) & \cdots② \end{cases}$$

だから

$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-1}) \quad \cdots③$$

また，$n \geqq 2$ のとき②より

$$z_{2n}-z_{2n-1}=\overline{\alpha}\,(z_{2n-1}-z_{2n-2})$$

だから①より

$$z_{2n+1}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-2}) \quad \cdots④$$

③，④より

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})$$

[終]

(2)　$z_1=0$，$z_2=1$ と①より

$$z_3=\alpha+1 \quad \cdots⑤$$

これと②より

$$z_4=\alpha+1+\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2+\alpha+1$$

一方，(1) の結果より，$n \geqq 3$ のとき

$$z_{2n}-z_{2n-2}=|\alpha|^{2n-4}(z_4-z_2) \quad (\text{これは } n=2 \text{ のときにも成り立つ})$$

$$=|\alpha|^{2n-4}(|\alpha|^2+\alpha) \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

よって，$0<|\alpha|<1$ に注意して

$$z_{2n}=z_2+(|\alpha|^2+\alpha)\sum_{k=2}^{n}|\alpha|^{2k-4}$$

$$=z_2+(|\alpha|^2+\alpha)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2n-2}}{1-|\alpha|^2} \quad \cdots⑥$$

ここで，α は虚数より

$$z_4-z_2=|\alpha|^2+\alpha \neq 0$$

だから

$$\frac{z_{2n}-z_2}{z_4-z_2}=\frac{1-|\alpha|^{2n-2}}{1-|\alpha|^2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ここで，$0<|\alpha|<1$ より $\dfrac{z_{2n}-z_2}{z_4-z_2}$ は正の実数である。

よって，すべての点 z_{2n} ($n=1$，2，3，…) は直線 z_2z_4 上にある。

また，$n \geqq 2$ のとき③より

$$z_{2n}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-2}-z_{2n-3})$$

だから，④とから

$$z_{2n+1}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-3})$$

これと⑤より

$$z_{2n+1}-z_{2n-1}=|\alpha|^{2n-2}(z_3-z_1)=(1+\alpha)|\alpha|^{2n-2}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$z_{2n-1}=(1+\alpha)\sum_{k=1}^{n-1}|\alpha|^{2k-2}=(1+\alpha)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2n-2}}{1-|\alpha|^2} \quad \cdots ⑦$$

$z_1=0$ と $z_3=1+\alpha$ ($\fallingdotseq 0$) であることから

$$\frac{z_{2n-1}-z_1}{z_3-z_1}=\frac{1-|\alpha|^{2n-2}}{1-|\alpha|^2}$$

$\dfrac{1-|\alpha|^{2n-2}}{1-|\alpha|^2}$ が正の実数であることより，すべての点 z_{2n-1} ($n=1$，2，3，…) は直線 z_1z_3 上にある。

[終]

(3)　⑦と $0<|\alpha|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

⑥と $0<|\alpha|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n}=1+\frac{|\alpha|^2+\alpha}{1-|\alpha|^2}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

だから，求める w は

$$w=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$ …[答]

高松高等予備校