数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

1

(1)　$y=x^3-ax$ より

$$y'=3x^2-a$$

C 上の点 (t, t^3-at) における C の接線の方程式は

$$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$$

$$y=(3t^2-a)x-2t^3 \quad \cdots(*)$$

これが $(1, 0)$ を通るので

$$0=(3t^2-a)-2t^3$$

$$a=-2t^3+3t^2 \quad \cdots①$$

$a=5$ より

$$2t^3-3t^2+5=0$$

$$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$$

t の2次方程式 $2t^2-5t+5=0$ は

$$2t^2-5t+5=2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

なので実数解はない。

ゆえに

$$t=-1$$

したがって，求める接線の方程式は

$(*)$に $a=5, t=-1$ を代入して

$y=-2x+2$　　…[答]

(2)　$g(t)=-2t^3+3t^2$ とおくと

3次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なる。

求める接線が3本存在するのは

①が異なる3つの実数解をもつときである。

それは，曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=a$ が

異なる3つの共有点をもつことである。

$$g'(t)=-6t^2+6t$$

$$=-6t(t-1)$$

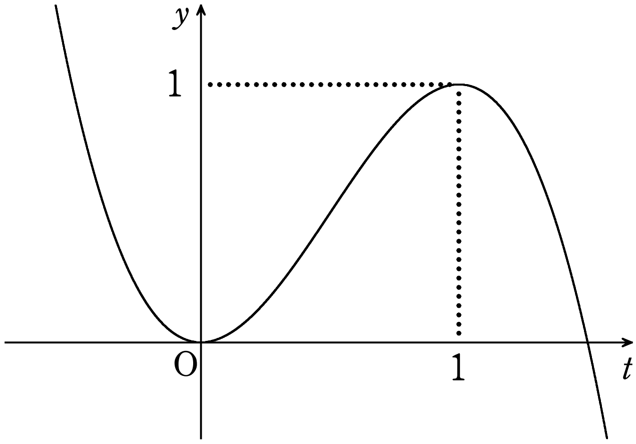
$g'(t)=0$ とすると

$$t=0, 1$$

よって，$g(t)$の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

$y=g(t)$ のグラフは次の図のようになっているので



求める a の値の範囲は

$0<a<1$ …[答]

高松高等予備校

数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

2

(1)　$2^{n+3}-2^{n}=7\times 2^{n}$

より　$R(2^{n+3})=R(2^{n})$　[証明終]

(2)　$2017=3\times 672+1$

と (1) の結果より

$R(2^{2017})=R(2)=2$　…[答]

(3)　(2) と同様にして，$29=3\times 9+2$ であるから

$R(2^{29})=R(2^{2})=R(4)$

これと (2) の結果より

$R(2^{2017}m+2^{29})=R(2m+4)$

$R(2^{2017}m+2^{29})=5$ であるから

$R(2m+4)=5$

したがって

$2m+4=7k+5$

となる整数 k が存在する。

$2m-7k=1$ …①

ここで

$2\times 4-7\times 1=1$ …②

であるから，①－②より

$2(m-4)-7(k-1)=0$　すなわち　$2(m-4)=7(k-1)$

2 と 7 は互いに素であるから，$m-4$ は 7 の倍数であり，

整数 l を用いて

$m-4=7l$　すなわち　$m=7l+4$

と表せる。

よって

$R(m)=R(7l+4)=4$　…[答]

高松高等予備校

３

(1) $f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$

$a=\dfrac{1}{2}$ だから，$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}$

また，$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ だから，$x=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{15}{16}$

よって，$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{16}$ …[答]

(2) $y=f(x)$ のグラフは，軸が $x=-\dfrac{a}{2}$ で下に凸の放物線だから

i) $-\dfrac{a}{2}<a-1$ すなわち $a>\dfrac{2}{3}$ のとき

$x=a-1$ で最小となるから

$m(a)=f(a-1)=2a^2-3a+2$

ii) $a-1\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq a+1$ すなわち $-\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき

$m(a)=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=1-\dfrac{a^2}{4}$

iii) $a<-\dfrac{2}{3}$ のとき

$m(a)=f(a+1)=2a^2+3a+2$

…[答]

(3) i) $a>\dfrac{2}{3}$ のとき

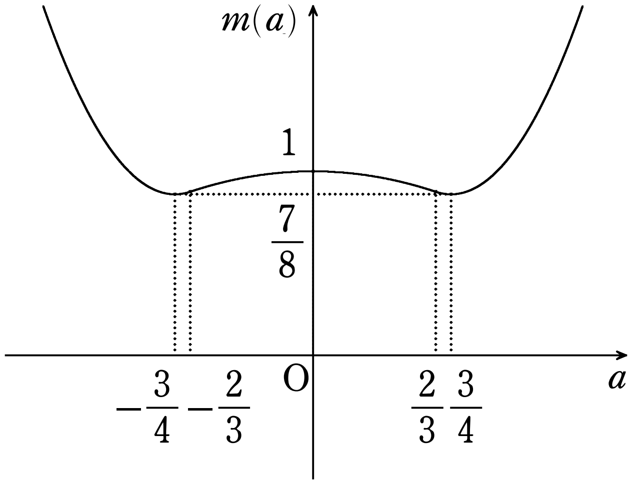
$m(a)=2a^2-3a+2=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$

ii) $-\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき

$m(a)=-\dfrac{a^2}{4}+1$

iii) $a<-\dfrac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$



グラフより，$a=\pm\frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{7}{8}$ …[答]

高松高等予備校

4

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ であるから

$$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$$

すなわち

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}&=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})\\&=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}\\&=0\end{aligned}$$

P，Q，R は異なる点であるから，$\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{RQ}\neq\vec{0}$ であり

$\overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ}$ [証明終]

(別証) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ であるから

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ})=0$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$$

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot\overrightarrow{RQ}=0$$

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$$

P，Q，R は異なる点であるから，$\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{RQ}\neq\vec{0}$ であり

$\overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ}$ [別証終]

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq 0$ であるから，(1) と同様にして

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}\leqq 0$$

すなわち

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})\leqq 0 \quad \cdots①$$

ここで，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ であり，①は $|\overrightarrow{OP}|\leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して成り立つから，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OQ}$ のときも①は成り立つ。

$$\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}\right)\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})\leqq 0$$

整理すると $\dfrac{1}{5}|\overrightarrow{OQ}|^2-\dfrac{6}{5}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}+|\overrightarrow{OR}|^2\leqq 0$

$|\overrightarrow{OQ}|=5$，$|\overrightarrow{OR}|=1$ より

$$5-\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}+1\leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\geqq 5$$

$\angle\mathrm{QOR}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\cos\theta\geqq 5$

よって　$\cos\theta\geqq 1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $\theta=0^\circ$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

逆に，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)+1-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-4\\
&=\frac{4}{5}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\angle\mathrm{POQ}-4\\
&\leqq\frac{4}{5}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|-4\\
&\leqq\frac{4}{5}\cdot 1\cdot 5-4=0
\end{aligned}$$

となり，条件を満たす。

よって　$\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$　…[答]

高松高等予備校