平成２９年度入学試験問題

数　　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

注　　　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄２箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は，すべて指定された解答用紙に書きなさい。
　また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
　ただし，裏面は採点の対象になりません。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

1

a を実数とする。座標平面内の曲線 $C : y = x^3 - ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $a = 5$ のとき，C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の範囲を求めよ。

2

自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。

(2) $R(2^{2017})$ を求めよ。

(3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。

3

a を実数とする。x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leqq x \leqq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

4

座標平面の原点を $\mathrm{O}(0, 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P，Q，R が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$$

を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を $(3, 4)$ とし，点 R は $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ を満たしているとする。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq 0$$

が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。