数学　２０１　その１

点 O は 1 辺の長さが 2 の正三角形の重心でも外心でもある。

正三角形の内接円の半径を r とおく。点 A，B，C，P は内接円の円周上の点より

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OP}|=r \quad \cdots ①$$

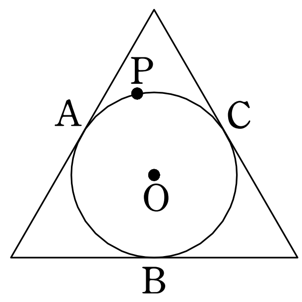
3 点 A，B，C は1 辺の長さが 2 の正三角形の各辺の中点になるから，
△ABC は正三角形で，O は△ABC の重心であるから

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\overrightarrow{OO}=\vec{0} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \quad \cdots ②$$

円周角の定理より，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=2\cdot 60^\circ=120^\circ$ だから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=r^2\cos 120^\circ=-\frac{r^2}{2} \quad \cdots ③$$

(1)　正三角形の内接円の半径を r とおく。



正三角形の面積についての関係より

$$\frac{2+2+2}{2}r=\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin 60^\circ$$

$$3r=\sqrt{3}$$

OA$=r$ より

$$OA=r=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cdots[答]$$

(2)
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$$

同様にして

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$$

だから

$$(与式)=\{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\}$$
$$-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+3|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=-\frac{3}{2}r^2+3r^2 \quad (\because \ ②，③より)$$

$$=\frac{3}{2}r^2$$

$$=\frac{1}{2}$$ …[答]

(3) $(\text{与式})=\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$

$=6r^2$ （∵ ①，③より）

$=2$ …[答]

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$

②より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であることと，①，③より

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-\dfrac{r^2}{2}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2$

$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{r^2}{2}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{6}$ …④ （∵ (1) の結果より）

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ ($0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$) とすると，①より

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r^2\cos\theta$ …⑤

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より

$-r^2\leqq r^2\cos\theta\leqq r^2$

(1) の結果と⑤より

$-\dfrac{1}{3}\leqq\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\leqq\dfrac{1}{3}$

各辺に $\dfrac{1}{6}$ を加えると，④より

$-\dfrac{1}{6}\leqq\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の $\begin{cases}\text{最大値は } \dfrac{1}{2}\\ \text{最小値は } -\dfrac{1}{6}\end{cases}$ …[答]

数学　２０１　その２

(1)　$(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1)=\dfrac{(n+1)(2n+3)(n^2-n+1)}{n}$

$$=\frac{(2n+3)(n^3+1)}{n}=\frac{2n^4+3n^3+2n+3}{n}=2n^3+3n^2+2+3n^{-1}$$

よって，n 進法の小数で表すと　2302.3　…[答]

(2)　3 進数 $21201_{(3)}$ を n 進法で表すと $320_{(n)}$ となることから

$$2\cdot3^4+1\cdot3^3+2\cdot3^2+0\cdot3^1+1=3n^2+2n$$

整理すると　$3n^2+2n-208=0$　すなわち　$(n-8)(3n+26)=0$

n は 4 以上の自然数であるから　$n=8$　…[答]

(3)　正の整数 N を 3 倍して 7 進法で表すと $abc_{(7)}$ となることと，

正の整数 N を 4 倍して 8 進法で表すと $acb_{(8)}$ となることから，

a は 1 以上 6 以下の整数，b，c は 0 以上 6 以下の整数であり，

$$\begin{cases}3N=49a+7b+c \cdots\cdots ① \\ 4N=64a+8c+b \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①，②より　$\dfrac{49a+7b+c}{3}=\dfrac{64a+8c+b}{4}$

整理すると　$4a+25b=20c$

変形して　$4a=5(4c-5b)$ ……③

4 と 5 は互いに素であるから，a は 5 の倍数である。

a は 1 以上 6 以下の整数であるから　$a=5$

このとき，③より　$4=4c-5b$　すなわち　$5b=4(c-1)$ ……④

4 と 5 は互いに素であるから，b は 4 の倍数である。

b は 0 以上 6 以下の整数であるから　$b=0$，4

④より　$(b,\ c)=(0,\ 1),\ (4,\ 6)$

以上より　$(a,\ b,\ c)=(5,\ 0,\ 1),\ (5,\ 4,\ 6)$　…[答]

$(a,\ b,\ c)=(5,\ 0,\ 1)$ のとき　$N=\dfrac{49a+7b+c}{3}=82$

$(a,\ b,\ c)=(5,\ 4,\ 6)$ のとき　$N=\dfrac{49a+7b+c}{3}=93$　…[答]

数学　２０１　その３

(1)　$f(x)=a\sqrt[n]{x}-\log x=ax^{\frac{1}{n}}-\log x$

$$f'(x)=\frac{a}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{a}{n}x^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$f'(x)=0$ のとき　$x=\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$

したがって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\left(\frac{n}{a}\right)^n$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

すべての $x>0$ に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つ条件は

$$f\left(\left(\frac{n}{a}\right)^n\right)=a\left\{\left(\frac{n}{a}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-n\log\frac{n}{a}=n\left(1-\log\frac{n}{a}\right)\geqq 0$$

すなわち　$a\geqq\dfrac{n}{e}$

よって，求める a_n は　$a_n=\dfrac{n}{e}$　…[答]

(2)　$\log x=a_n\sqrt[n]{x}$ のとき $x=\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$

$a=a_n=\dfrac{n}{e}$ とすると

$x=e^n$　…[答]

(3)　求める面積 S_n は

$$S_n=\int_1^{e^n}\left(\frac{n}{e}x^{\frac{1}{n}}-\log x\right)dx+\int_0^1\frac{n}{e}x^{\frac{1}{n}}dx$$

$$=\left[\frac{n}{e}\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-x\log x+x\right]_1^{e^n}+\left[\frac{n}{e}\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{n}{e}\cdot\frac{e^{1+n}}{\frac{1+n}{n}}-ne^n+e^n-\frac{n}{e}\cdot\frac{n}{n+1}-1+\frac{n}{e}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\left(\frac{n^2}{1+n}-n+1\right)e^n-1$$

$$=\frac{1}{1+n}e^n-1$$ …[答]

(4)　$\log(1+S_n)=\log\frac{e^n}{n+1}=n-\log(n+1)$

$a_2=\frac{2}{e}$ であり，すべての $x>0$ に対して $\log x \leqq \frac{2}{e}\sqrt{x}$ が成り立つ

から，n は 2 以上ゆえ $0<\log(n+1) \leqq \frac{2}{e}\sqrt{n+1}$ である。

$n-\frac{2}{e}\sqrt{n+1} \leqq n-\log(n+1)<n$

よって　$1-\frac{2}{e}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{n} \leqq \frac{\log(1+S_n)}{n}<1$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{e}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)=1$ だから　$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+S_n)}{n}=1$ …[答]

高松高等予備校

数学　２０１　その４

(1)　1 回の得点をX点とすると，Xは

$$X=1,\ 2,\ 3,\ 5$$

の 4 通りある。

それぞれの確率を$P(X)$とすると

$$P(1)=\frac{1}{3},\ P(2)=\frac{1}{6},\ P(3)=\frac{1}{3},\ P(5)=\frac{1}{6}$$

2 回の得点の和が 6 になるのは，次の (i)，(ii) の場合

(i)　$X=3$が 2 回

(ii)　$X=1$が 1 回 $X=5$が 1 回

であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{9}$$

…[答]

(2)　4 回の得点の和が 10 となるのは，4 回の得点が

(5，3，1，1)，(5，2，2，1)，(3，3，3，1)，(3，3，2，2)

の 5 通りの組合せのときであるから，求める確率は

$$\frac{4!}{1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4!}{1!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{13}{81}$$

…[答]

(3)　2 回目が 5 または 6 となる確率は $\frac{1}{3}$

そのとき，4 回の得点の和が 10 となるのは次の (i)，(ii) の場合

(i)　2 回目が 5 の目となる確率は $\frac{1}{6}$

このとき，残りの得点は (3，1，1)，(2，2，1)

(ii)　2 回目が 6 の目となる確率は $\frac{1}{6}$

このとき，残りの得点は (5，1，1)，(3，3，1)，(3，2，2)

よって

$$\frac{1}{6}\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{6}\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{18}$$

これより，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$$

…[答]

高松高等予備校