[1]

(1) $y \geqq |2x+1|$ について

$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq 2x+1$

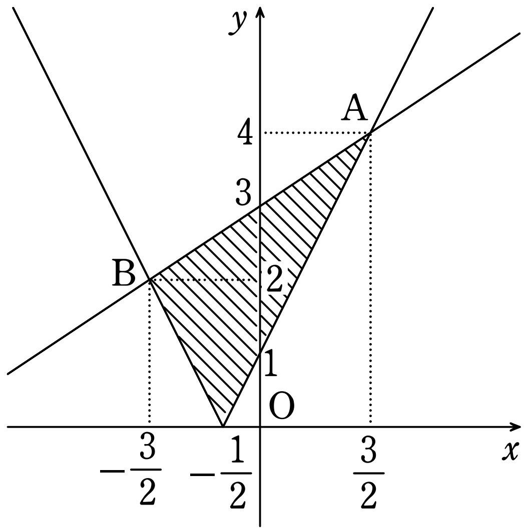
$x < -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq -2x-1$

また，$2x-3y+9 \geqq 0$ より $y \leqq \dfrac{2}{3}x+3$

$y=2x+1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を A とおくと，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$

$y=-2x-1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を B とおくと，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

領域 D を図示すると，右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



…[答]

(2) $k=x^2-4x+y^2$ とおくと

$(x-2)^2+y^2=k+4$　…①

これが領域 D と共有点をもつときの k の最大値と最小値を考える。①は $k=-4$ のとき点 $(2,\ 0)$ を表すが，点 $(2,\ 0)$ は領域 D に含まれないので，$k>-4$ のときを考える。

このとき，①は

中心 $(2,\ 0)$，半径 $\sqrt{k+4}$

の円を表す。

①が点 A を通るとき　$k=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{3}{2}+4^2=\dfrac{49}{4}$

①が点 B を通るとき　$k=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2^2=\dfrac{49}{4}$

となるから，①が点 A または点 B を通るとき k は最大となる。

また， k の最小値について，円の中心 $(2,\ 0)$ から直線 $2x-y+1=0$ までの距離と半径の関係を考えると

$$\frac{|2\cdot 2-0+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k+4}$$

これより

$$k+4=5$$

すなわち

$$k=1$$

このとき，接点は $y=2x+1$ と $y=-\frac{1}{2}(x-2)$ との交点より

$$x=0\ ,\ \ y=1$$

以上より

点 $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$ または点 $\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$ のとき $M=\frac{49}{4}$

点 $(0,\ 1)$ のとき $m=1$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\times7}{2}=\frac{7}{2}$ …[答]

(2) i 回目のさいころの目を a_i とする。

1回で終了するのは $a_i=1$のときで $\dfrac{1}{6}$

2回で終了するのは $x_2=1$ のときであるが $x_1\neq1$ かつ $x_2=1$ となるのは「 $x_1=2\Leftrightarrow a_1=2$かつ a_2 が偶数」のときに限る。

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

よって，2回以下で終了する確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$ …[答]

(3) ちょうど3回で終了するのは

$x_2=2$ かつ a_3 が偶数 …①

$x_2=2$ となるのは，次の場合である。

$x_1=2$でa_2が奇数または $x_1=4$でa_2が偶数 $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}\times2$ …②

②，①より，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$

(2)より，3回以下で終了する確率は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$ …[答]

(4) x_i と x_{i+1}の関係は次の表のようになる。

<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>x_{i+1}</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>10</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>16</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>10</td><td>5</td><td>16</td><td>8</td><td>8</td><td>4</td></tr>
</table>

x_i はこれら9個の値しかとらない。

4回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to1$，$4\to2\to2\to1$，$4\to4\to2\to1$となる場合で $\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times3=\dfrac{1}{16}$

5回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to1$

$4\to4\to2\to2\to1$

$4\to4\to4\to2\to1$

となる場合で $\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times4=\dfrac{1}{24}$

6回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to2\to1$

$$4\to4\to2\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to4\to2\to1$$
$$5\to16\to8\to4\to2\to1$$

となる場合で　$\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times6=\dfrac{1}{32}$

(3)より，6 回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{45}{96}=\frac{15}{32}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$(n+1)a_{n+1}-3(n+2)a_n=2n^2+6n+4=2(n+1)(n+2)$

n は自然数で $(n+1)(n+2)\neq 0$ であるから，両辺を $(n+1)(n+2)$で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+2}-3\cdot\frac{a_n}{n+1}=2$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$ とおくとき

$$b_{n+1}-3b_n=2$$

よって　$b_{n+1}=3b_n+2$　（$n=1$，2，3，……）　…[答]

(2)　$b_{n+1}=3b_n+2$ を変形して

$$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{a_1}{1+1}+1=\dfrac{2}{2}+1=2$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$$

よって　$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$　…[答]

(3)　$a_n=(n+1)b_n=(n+1)(2\cdot 3^{n-1}-1)$　…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$y=x^2$ より，　$y'=2x$

接線 ℓ の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$
$$=2ax-a^2 \quad \cdots[\text{答}]$$

(2)　(1) の ℓ，C' より

$$(x+b)^2-b^2=2ax-a^2$$
$$x^2+2(b-a)x+a^2=0 \quad \cdots①$$

判別式 $D=0$ より

$$(b-a)^2-a^2=0$$
$$b(b-2a)=0$$

$b \neq 0$ より　$b=2a$　…[答]

① より，接点 Q の x 座標は

$$x=a-b=-a$$
$$y=2a(-a)-a^2=-3a^2$$

よって，Q$(-a,\ -3a^2)$　…[答]

(3)　C と C' の交点の x 座標を求めると

$x^2=x^2+4ax$ より $x=0$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-a}^{0}(x+a)^2dx+\int_{0}^{a}(x-a)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x+a)^3}{3}\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_{0}^{a}$$
$$=\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3 \quad \cdots[\text{答}]$$

高松高等予備校