[1]

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく。

PO : PA $=3:1$ より

$$3\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 9\{(x-4)^2+y^2\}=x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-9x+18=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

よって，点 P の軌跡の方程式は

円 $\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ …[答]

である。

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく。

PO : PB $=3:r$ より

$$3\sqrt{x^2+(y-3)^2}=r\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (r^2-9)(x^2+y^2)+54y-81=0$$

$r>3$ よりこれは

$$x^2+y^2+\frac{54y}{r^2-9}-\frac{81}{r^2-9}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{27}{r^2-9}\right)^2=\frac{81r^2}{(r^2-9)^2}$$

と同値。

よって，点 P の軌跡の方程式は

円 $x^2+\left(y+\dfrac{27}{r^2-9}\right)^2=\dfrac{81r^2}{(r^2-9)^2}$ …[答]

である。

(3)　2 つの円

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}\\[2ex] x^2+\left(y+\dfrac{27}{r^2-9}\right)^2=\dfrac{81r^2}{(r^2-9)^2}\end{cases}$$

について共有点は

$$-9x+18-\frac{54}{r^2-9}y+\frac{81(r^2-9)}{(r^2-9)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{6}{r^2-9}y-\frac{2r^2-9}{r^2-9}=0$$

を満たすので，題意のようになる条件は

$$\frac{\left|\frac{9}{2}-\frac{2r^2-9}{r^2-9}\right|}{\sqrt{1+\frac{36}{(r^2-9)^2}}}\leqq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |5r^2-63|\leqq 3\sqrt{(r^2-9)^2+36}$$

$$\Leftrightarrow (5r^2-63)^2\leqq 9(r^2-9)^2+9^2\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow (4r^2-45)(r^2-18)\leqq 81$$

$$\Leftrightarrow 4r^4-9\cdot 13r^2+9^3\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2-9)(4r^2-9^2)\leqq 0$$

となることである。$r>3$ に注意して

$$9<r^2\leqq\frac{9^2}{4}$$

よって

$$3<r\leqq\frac{9}{2}$$

…[答]

高松高等予備校

[2]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\times7}{2}=\frac{7}{2}$ …[答]

(2) i 回目のさいころの目を a_i とする。

1回で終了するのは $a_i=1$のときで $\frac{1}{6}$

2回で終了するのは $x_2=1$ のときであるが $x_1\fallingdotseq 1$ かつ $x_2=1$ となるのは「$x_1=2 \Leftrightarrow a_1=2$かつ a_2 が偶数」のときに限る。

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

よって，2回以下で終了する確率は $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$ …[答]

(3) ちょうど3回で終了するのは

$x_2=2$ かつ a_3 が偶数 …①

$x_2=2$ となるのは，次の場合である。

$x_1=2$でa_2が奇数または $x_1=4$でa_2が偶数 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times2$ …②

②，①より，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(2)より，3回以下で終了する確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ …[答]

(4) x_i と x_{i+1}の関係は次の表のようになる。

x_i	1	2		3		4		5		6		10		16		8	
x_{i+1}		2	1	10	3	4	2	16	5	6	3	10	5	16	8	8	4

x_i はこれら9個の値しかとらない。

4回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to1$，$4\to2\to2\to1$，$4\to4\to2\to1$となる

場合で $\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times3=\frac{1}{16}$

5回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to1$

$4\to4\to2\to2\to1$

$4\to4\to4\to2\to1$

となる場合で $\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times4=\frac{1}{24}$

6回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to2\to1$

$$4\to4\to2\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to4\to2\to1$$
$$5\to16\to8\to4\to2\to1$$

となる場合で　$\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times6=\dfrac{1}{32}$

(3)より，6 回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{45}{96}=\frac{15}{32}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=16-2$

$=14$ …[答]

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=64-3\cdot1\cdot4$

$=52$ …[答]

(2) $\alpha^2=4\alpha-1$

$\beta^2=4\beta-1$

両辺に α^n, β^n をそれぞれかけて

$\alpha^{n+2}=4\alpha^{n+1}-\alpha^n$

$\beta^{n+2}=4\beta^{n+1}-\beta^n$

辺々加えて, $a_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと

$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ …①

すべての自然数 n に対して,「$a_n=\alpha^n+\beta^n$ は偶数である」を(A)とする。(A)を数学的帰納法で示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき, $a_1=\alpha+\beta=4$

$n=2$ のとき, $a_2=\alpha^2+\beta^2=14$

よって, $n=1$, $n=2$ のとき(A)は成り立つ。

(ⅱ) $n=k$, $k+1$ のとき, (A)が成り立つと仮定する。すなわち

a_k, a_{k+1} が偶数と仮定すると

① より, $a_{k+2}=4a_{k+1}-a_k$ も偶数である。

よって, $n=k+2$ のとき,(A)は成り立つ。

(ⅰ),(ⅱ)よりすべての自然数 n に対して(A)は成り立つ。 [証明終]

(3) $\alpha=2+\sqrt{3}$, $\beta=2-\sqrt{3}$

(2)より $\alpha^n=a_n-\beta^n$

いま, $0<\beta<1$ より

$0<\beta^n<1$

$-1<-\beta^n<0$

$a_n-1<a_n-\beta^n<a_n$

a_n-1, a_n は整数で, $(a_n-1)+1=a_n$ であるから

$$[a_n-\beta^n]=a_n-1$$

a_n は偶数であるから a_n-1 は奇数

よって

$$[\alpha^n]=[a_n-\beta^n]$$

は奇数である。

[証明終]

高松高等予備校

[4]

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots① \\ y=x^2 & \cdots② \end{cases}$

のとき②より $y \geqq 0$ であって

①より

$y^2+y-2=0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y-1)=0$

$y \geqq 0$ だから

$y=1$

のみ適する。このとき②より

$x^2=1$

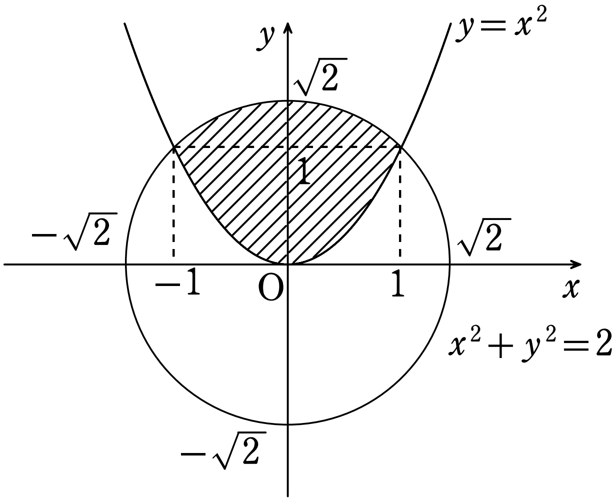
ゆえに

$x=\pm 1$

したがって交点は

$(1,1)$, $(-1,1)$ …[答]

(2)



D は図の斜線部分(ただし境界線を含む) …[答]

(3) O$(0,0)$, A$(1,1)$, B$(-1,1)$ とする

D の y 軸に関する対象性に注意すると，求める面積は

$$(\text{扇形OAB}) + 2\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{\pi}{2} + 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$ …[答]

(4)　求める体積は

$$\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-y^2)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1+\pi\left[2y-\frac{1}{3}y^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$$ …[答]

高松高等予備校