[1]

(1)　$y \geqq |2x+1|$ について

$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq 2x+1$

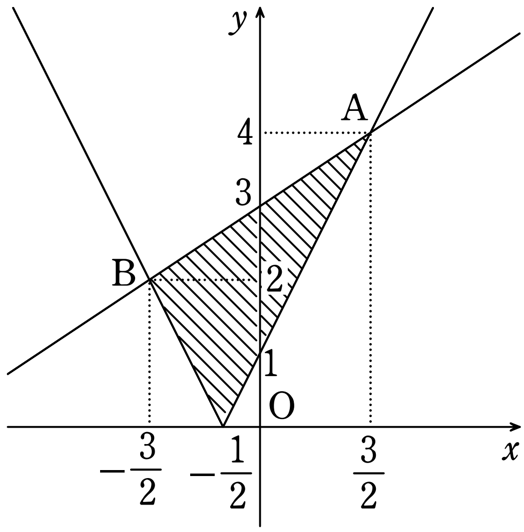
$x < -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq -2x-1$

また，$2x-3y+9 \geqq 0$ より $y \leqq \dfrac{2}{3}x+3$

$y=2x+1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を A とおくと，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$

$y=-2x-1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を B とおくと，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

領域 D を図示すると，右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



…[答]

(2)　$k=x^2-4x+y^2$ とおくと

$(x-2)^2+y^2=k+4$　…①

これが領域 D と共有点をもつときの k の最大値と最小値を考える。①は $k=-4$ のとき点 $(2,\ 0)$ を表すが，点 $(2,\ 0)$ は領域 D に含まれないので，$k>-4$ のときを考える。

このとき，①は

中心 $(2,\ 0)$，半径 $\sqrt{k+4}$

の円を表す。

①が点 A を通るとき　$k=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{3}{2}+4^2=\dfrac{49}{4}$

①が点 B を通るとき　$k=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2^2=\dfrac{49}{4}$

となるから，①が点 A または点 B を通るとき k は最大となる。

また， k の最小値について，円の中心 $(2,\ 0)$ から直線 $2x-y+1=0$ までの距離と半径の関係を考えると

$$\frac{|2\cdot 2-0+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k+4}$$

これより

$$k+4=5$$

すなわち

$$k=1$$

このとき，接点は $y=2x+1$ と $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)$ との交点より

$$x=0\ ,\quad y=1$$

以上より

点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$ または点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ のとき $M=\dfrac{49}{4}$ …[答]

点 $(0,\ 1)$ のとき $m=1$

高松高等予備校

[2]

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\times 7}{2}=\frac{7}{2}$　…[答]

(2)　i 回目のさいころの目を a_i とする。

1 回で終了するのは $a_i=1$のときで $\frac{1}{6}$

2 回で終了するのは $x_2=1$ のときであるが $x_1\fallingdotseq 1$ かつ $x_2=1$ となるのは「 $x_1=2 \Leftrightarrow a_1=2$かつ a_2 が偶数」のときに限る。

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

よって，2 回以下で終了する確率は　$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$　…[答]

(3)　ちょうど 3 回で終了するのは

$x_2=2$ かつ a_3 が偶数　…①

$x_2=2$ となるのは，次の場合である。

$x_1=2$でa_2が奇数または $x_1=4$でa_2が偶数　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 2$ …②

②，①より，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(2)より，3 回以下で終了する確率は　$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$　…[答]

(4)　x_i と x_{i+1}の関係は次の表のようになる。

x_i	1	2		3		4		5		6		10		16		8	
x_{i+1}		2	1	10	3	4	2	16	5	6	3	10	5	16	8	8	4

x_i はこれら 9 個の値しかとらない。

4 回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to1$，$4\to2\to2\to1$，$4\to4\to2\to1$となる場合で　$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 3=\frac{1}{16}$

5 回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to1$

$4\to4\to2\to2\to1$

$4\to4\to4\to2\to1$

となる場合で　$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4=\frac{1}{24}$

6 回で終わるのは x_i が $2\to2\to2\to2\to2\to1$

$4\to2\to2\to2\to2\to1$

$$4\to4\to2\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to2\to2\to1$$
$$4\to4\to4\to4\to2\to1$$
$$5\to16\to8\to4\to2\to1$$

となる場合で　$\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times6=\dfrac{1}{32}$

(3)より，6回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{45}{96}=\frac{15}{32}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$(n+1)a_{n+1}-3(n+2)a_n=2n^2+6n+4=2(n+1)(n+2)$

n は自然数で $(n+1)(n+2)\neq 0$ であるから，両辺を $(n+1)(n+2)$で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+2}-3\cdot\frac{a_n}{n+1}=2$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$ とおくとき

$$b_{n+1}-3b_n=2$$

よって　$b_{n+1}=3b_n+2$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$　…[答]

(2)　$b_{n+1}=3b_n+2$ を変形して

$$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{a_1}{1+1}+1=\dfrac{2}{2}+1=2$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$$

よって　$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$　…[答]

(3)　$a_n=(n+1)b_n=(n+1)(2\cdot 3^{n-1}-1)$　…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$y=x^2$ より，　$y'=2x$

接線 ℓ の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$
$$=2ax-a^2 \qquad \cdots[答]$$

(2)　(1) の ℓ，　C' より

$$(x+b)^2-b^2=2ax-a^2$$
$$x^2+2(b-a)x+a^2=0 \qquad \cdots①$$

判別式 $D=0$ より

$$(b-a)^2-a^2=0$$
$$b(b-2a)=0$$

$b \fallingdotseq 0$ より　$b=2a$　…[答]

① より，接点 Q の x 座標は

$$x=a-b=-a$$
$$y=2a(-a)-a^2=-3a^2$$

よって，Q$(-a,\ -3a^2)$　…[答]

(3)　C と C' の交点の x 座標を求めると

$x^2=x^2+4ax$ より $x=0$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-a}^{0}(x+a)^2dx+\int_{0}^{a}(x-a)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x+a)^3}{3}\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_{0}^{a}$$
$$=\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3 \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校

[5]

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots① \\ y=x^2 & \cdots② \end{cases}$

のとき②より $y \geqq 0$ であって

①より

$$y^2+y-2=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y-1)=0$$

$y \geqq 0$ だから

$$y=1$$

のみ適する。このとき②より

$$x^2=1$$

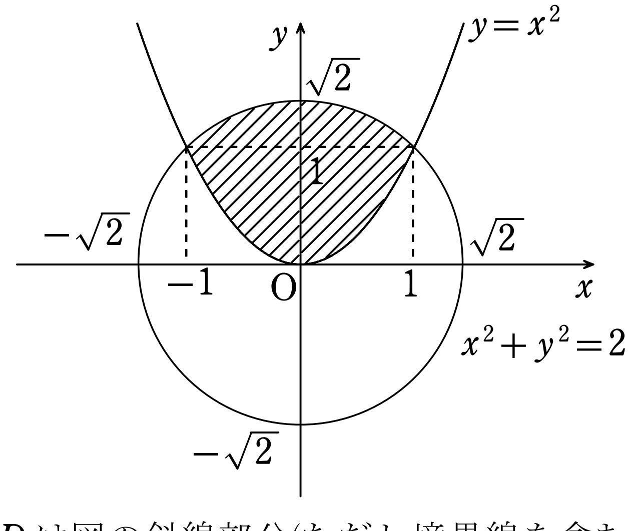
ゆえに

$$x=\pm 1$$

したがって交点は

$(1,1)$，$(-1,1)$ …[答]

(2)



D は図の斜線部分(ただし境界線を含む) …[答]

(3) $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(-1,1)$ とする

D の y 軸に関する対象性に注意すると，求める面積は

$$(\text{扇形OAB})+2\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{\pi}{2}+2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$ …[答]

(4)　求める体積は

$$\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-y^2)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1+\pi\left[2y-\frac{1}{3}y^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$$ …[答]

高松高等予備校