[1]

(1)　$y \geqq |2x+1|$ について

$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq 2x+1$

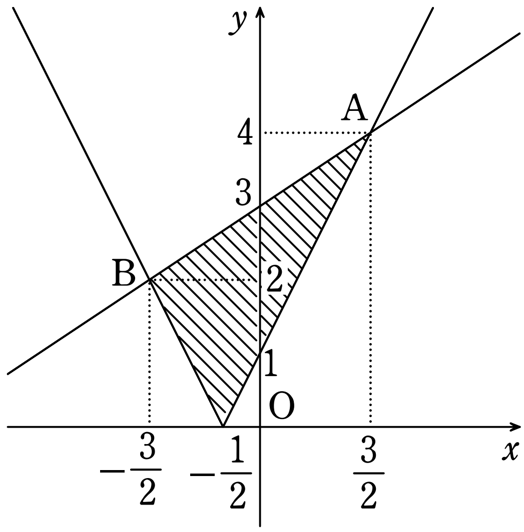
$x < -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \geqq -2x-1$

また，$2x-3y+9 \geqq 0$ より $y \leqq \dfrac{2}{3}x+3$

$y=2x+1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を A とおくと，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$

$y=-2x-1$ と $y=\dfrac{2}{3}x+3$ の交点を B とおくと，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

領域 D を図示すると，右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



…[答]

(2)　$k=x^2-4x+y^2$ とおくと

$(x-2)^2+y^2=k+4$　…①

これが領域 D と共有点をもつときの k の最大値と最小値を考える。
①は $k=-4$ のとき点 $(2,\ 0)$ を表すが，点 $(2,\ 0)$ は領域 D に含まれないので，$k>-4$ のときを考える。
このとき，①は

中心 $(2,\ 0)$，半径 $\sqrt{k+4}$

の円を表す。

①が点 A を通るとき　$k=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{3}{2}+4^2=\dfrac{49}{4}$

①が点 B を通るとき　$k=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2^2=\dfrac{49}{4}$

となるから，①が点 A または点 B を通るとき k は最大となる。

また，k の最小値について，円の中心 $(2,\ 0)$ から直線 $2x-y+1=0$ までの距離と半径の関係を考えると

$$\frac{|2\cdot 2-0+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k+4}$$

これより

$$k+4=5$$

すなわち

$$k=1$$

このとき，接点は $y=2x+1$ と $y=-\frac{1}{2}(x-2)$ との交点より

$$x=0\ ,\ \ y=1$$

以上より

点 $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$ または点 $\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$ のとき $M=\frac{49}{4}$ …[答]

点 $(0,\ 1)$ のとき $m=1$

高松高等予備校

[2]

(1) $a_5=\dfrac{1}{2^5}\left(\sin\dfrac{5}{2}\pi+\cos\dfrac{5}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$ …[答]

$a_6=\dfrac{1}{2^6}\left(\sin\dfrac{6}{2}\pi+\cos\dfrac{6}{2}\pi\right)=-\dfrac{1}{2^6}=-\dfrac{1}{64}$ …[答]

(2) $a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2^{4k-3}}\left\{\sin\left(2k\pi-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2k\pi-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2^{4k-2}}\{\sin(2k\pi-\pi)+\cos(2k\pi-\pi)\}\\
&\quad+\frac{1}{2^{4k-1}}\left\{\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2^{4k}}\{\sin 2k\pi+\cos 2k\pi\}\\
&=\frac{1}{2^{4k-3}}-\frac{1}{2^{4k-2}}-\frac{1}{2^{4k-1}}+\frac{1}{2^{4k}}\\
&=\frac{8-4-2+1}{2^{4k}}\\
&=\frac{3}{16^k}=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S_{4n}&=\sum_{k=1}^{4n}a_k\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}\\
&=\frac{\frac{3}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{16}}\\
&=\frac{3}{16-1}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}\\
&=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

…[答]

(3) $0.1999 < S_{4n}$

$$\frac{1999}{10000} < \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)$$

$$\frac{1999}{2000} < 1-\frac{1}{2^{4n}}$$

$$\frac{1}{2^{4n}} < \frac{1}{2000}$$

$$2^{4n} > 2000$$

ところで，$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$ であり

n は自然数であるから

$$4n > 10$$

$$n > \frac{5}{2}$$

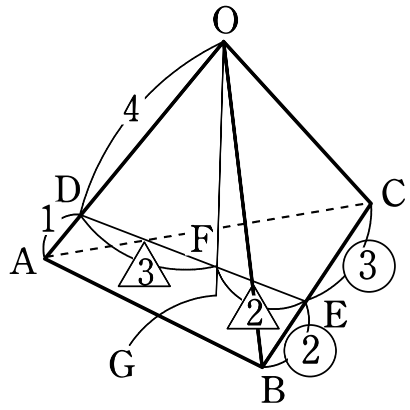
これをみたす最小の自然数は

$n=3$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)



$$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{5}\vec{a}$$ …[答]

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{3+2}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$ …[答]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF}&=\frac{2\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OE}}{3+2}\\&=\frac{1}{5}\left\{2\cdot\frac{4}{5}\vec{a}+3\left(\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)\right\}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5}\vec{a}+\frac{9}{5}\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{c}\right)\\&=\frac{8}{25}\vec{a}+\frac{9}{25}\vec{b}+\frac{6}{25}\vec{c}\end{aligned}$$ …[答]

(2) $\overrightarrow{OG}=l\,\overrightarrow{OF}$ （l は実数)

$$\begin{aligned}&=l\left(\frac{8}{25}\vec{a}+\frac{9}{25}\vec{b}+\frac{6}{25}\vec{c}\right)\\&=\frac{8}{25}l\vec{a}+\frac{9}{25}l\vec{b}+\frac{6}{25}l\vec{c}\end{aligned}$$

点 G は平面 ABC 上にあるので

$\frac{8}{25}l+\frac{9}{25}l+\frac{6}{25}l=1$ より $l=\frac{25}{23}$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{8}{23}\vec{a}+\frac{9}{23}\vec{b}+\frac{6}{23}\vec{c}$$ …[答]

(3) (2) より $\overrightarrow{OG}=\frac{25}{23}\overrightarrow{OF}$ だから

OF : FG = 23 : 2 …[答]

高松高等予備校

[4]

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots① \\ y=x^2 & \cdots② \end{cases}$

のとき②より $y \geqq 0$ であって

①より

$y^2+y-2=0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y-1)=0$

$y \geqq 0$ だから

$y=1$

のみ適する。このとき②より

$x^2=1$

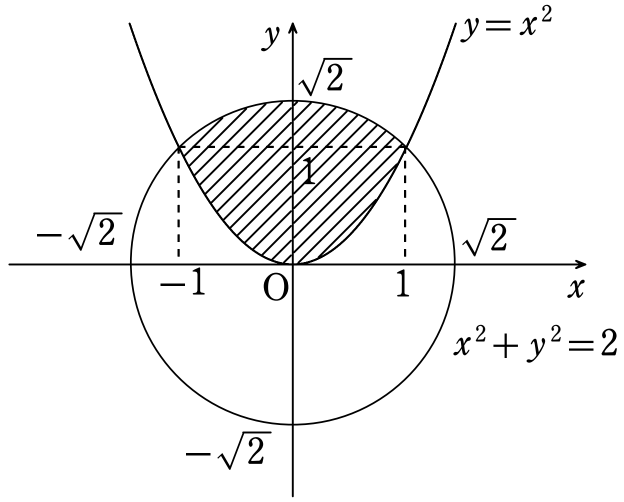
ゆえに

$x=\pm 1$

したがって交点は

$(1,1)$，$(-1,1)$ …[答]

(2)



D は図の斜線部分(ただし境界線を含む) …[答]

(3) O$(0,0)$， A$(1,1)$， B$(-1,1)$ とする

D の y 軸に関する対象性に注意すると，求める面積は

$$(\text{扇形OAB})+2\int_0^1 (x-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{\pi}{2}+2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$ …[答]

(4)　求める体積は

$$\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-y^2)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1+\pi\left[2y-\frac{1}{3}y^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$$ …[答]

高松高等予備校