数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　$f(x)=(1+x)e^x=0$

とすると，$e^x>0$ より $e^x \neq 0$ だから

$1+x=0$

すなわち

$x=-1$ …[答]

(2)　$f'(x)=(1+x)'e^x+(1+x)(e^x)'$

$=e^x+(1+x)e^x$

$=(2+x)e^x$

だから，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$

における接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

これが原点を通るから

$-f(t)=-tf'(t)$

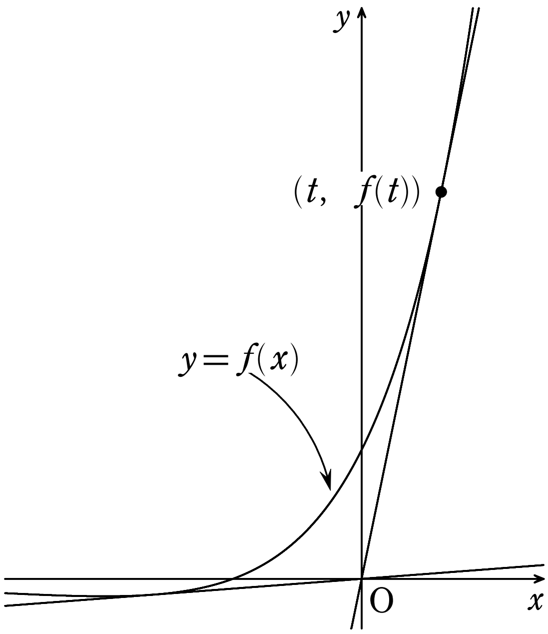
$-(1+t)e^t=-t(2+t)e^t$

$e^t>0$ より $e^t \neq 0$ だから

$1+t=t(2+t)$

すなわち

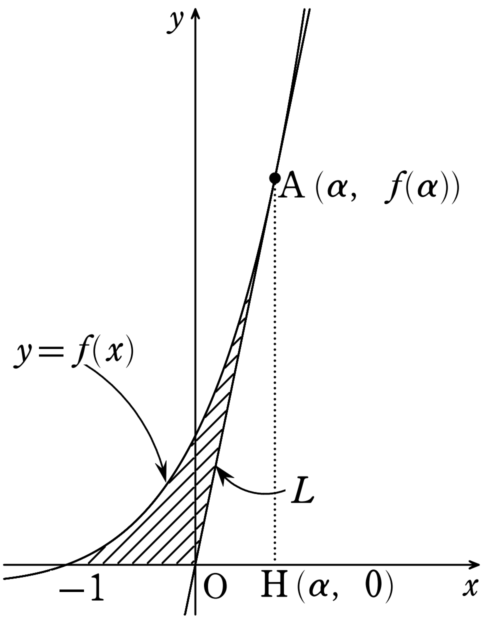
$t^2+t-1=0$



これを解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ となる。このとき，求める接線は

$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき } y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}x \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ のとき } y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}x \end{array}\right\}$$ …[答]

(3)　$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおく。L と $y=f(x)$ の接点を A$(\alpha,\ f(\alpha))$ とし，点 A から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を H とする。H$(\alpha,\ 0)$ であり，求める部分の面積を S とすると S は右の図の斜線部分の面積である。



よって

$$S=\int_{-1}^{\alpha}(1+x)e^{x}dx-\triangle\mathrm{OHA}$$

となる。ところで

$$\int_{-1}^{\alpha}(1+x)e^{x}dx$$
$$=\Big[(1+x)e^{x}\Big]_{-1}^{\alpha}-\int_{-1}^{\alpha}e^{x}dx$$
$$=(1+\alpha)e^{\alpha}-\Big[e^{x}\Big]_{-1}^{\alpha}$$
$$=(1+\alpha)e^{\alpha}-(e^{\alpha}-e^{-1})$$
$$=\alpha e^{\alpha}+\frac{1}{e}$$

であり

$$\triangle\mathrm{OHA}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot(1+\alpha)e^{\alpha}$$

だから

$$S=\alpha e^{\alpha}+\frac{1}{e}-\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)e^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}e^{\alpha}(\alpha-\alpha^{2})+\frac{1}{e}$$

(2) より $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は $\alpha^2+\alpha-1=0$ を満たすから

$$\alpha-\alpha^{2}=\alpha-(1-\alpha)$$
$$=2\alpha-1$$
$$=\sqrt{5}-2$$

よって

$$S=\frac{\sqrt{5}-2}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{e}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　n 回目にⒷ，Ⓒにある確率を b_n，c_n とする。

題意より

$$b_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}，\quad c_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$b_{n+1}=b_n\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}b_n$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

…[答]

(2)　題意と (1) の結果より

$$c_{n+1}=c_n\cdot\frac{4}{6}+b_n\cdot\frac{3}{6}$$

$$=\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$3^{n+1}c_{n+1}=2\cdot 3^n c_n+\frac{9}{4}$$

$3^n c_n=a_n$ とおくと

$$a_{n+1}=2a_n+\frac{9}{4}$$

変形して

$$a_{n+1}+\frac{9}{4}=2\left(a_n+\frac{9}{4}\right)$$

数列 $\left\{a_n+\frac{9}{4}\right\}$ は初項 $a_1+\frac{9}{4}=3\cdot\frac{1}{3}+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$，公比 2 の等比数列だから

$$a_n+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}\cdot 2^{n-1}$$

ゆえに

$$3^n c_n=\frac{13}{4}\cdot 2^{n-1}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{13}{8}\cdot 2^n-\frac{9}{4}$$

したがって

$$c_n=\frac{13}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

…[答]

(3) [1] $n=1$ のとき 4 の目が出るときの確率だから $\dfrac{1}{6}$

[2] $n\geqq 2$ のとき

$(n-1)$ 回目にⒷにいて，4 の目が出るか

$(n-1)$ 回目にⒸにいて，3 か 4 の目が出るときである。

よって

$$b_{n-1}\cdot\frac{1}{6}+c_{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{13}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

以上より，求める確率は

$n=1$ のとき $\dfrac{1}{6}$

$n\geqq 2$ のとき $\dfrac{13}{24}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$

条件より，$D<0$ であるから

$D=k^2-4(3k-4)<0$

$k^2-12k+16<0$

$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ …[答]

(2)　与式より，$x^2=kx-3k+4$ となるから

$\alpha^2=k\alpha+(4-3k)$

$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha$

$=k\alpha^2+(4-3k)\alpha$

$=k\{k\alpha+(4-3k)\}+(4-3k)\alpha$

$=k^2\alpha+(4k-3k^2)+(4-3k)\alpha$

$=(k^2-3k+4)\alpha+(4k-3k^2)$

$\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha$

$=(k^2-3k+4)\alpha^2+(4k-3k^2)\alpha$

$=(k^2-3k+4)\{k\alpha+(4-3k)\}+(4k-3k^2)\alpha$

$=(k^3-3k^2+4k)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)+(4k-3k^2)\alpha$

$=(k^3-3k^2+4k+4k-3k^2)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)$

$=(k^3-6k^2+8k)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)$

α は虚数，α^4 は実数であるから

$k^3-6k^2+8k=0$

$k(k^2-6k+8)=0$

$k(k-2)(k-4)=0$

$k=0,\ 2,\ 4$

$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ より，$k=2,\ 4$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　題意より　$-3\leqq s\leqq -1$ …①

であって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(2,0,1)+t(0,3,s)$$
$$=(2-2t,3t,1-t+st)$$

だから，求める方程式は

$$(x-2+2t)^2+(y-3t)^2+(z-1+t-st)^2=9$$ …[答]

(2)　(1)の結果と $z=0$ より

$$(x-2+2t)^2+(y-3t)^2=9-(-1+t-st)^2$$

よって

$$S_1=\pi[9-\{(1-s)t-1\}^2]$$ …[答]

(3)　(1)の結果と $x=0$ より

$$(y-3t)^2+(z-1+t-st)^2=9-4(1-t)^2$$

だから

$$S_2=\pi\{9-4(1-t)^2\}$$

これと(2)の結果より

$$S_1+S_2=\pi\{18-(1-s)^2t^2+2(1-s)t-1-4t^2+8t-4\}$$
$$=\pi\{-(5-2s+s^2)t^2+2(5-s)t+13\}$$
$$=\pi\left\{-(5-2s+s^2)\left(t-\frac{5-s}{5-2s+s^2}\right)^2+13+\frac{(5-s)^2}{5-2s+s^2}\right\}$$

ここで $u=5-s$ とおくと①より $6\leqq u\leqq 8$ であって

$$\frac{5-s}{5-2s+s^2}=\frac{u}{u^2-8u+20}=\frac{1}{u+\frac{20}{u}-8}$$

であり

$$\frac{d}{du}\left(u+\frac{20}{u}-8\right)=1-\frac{20}{u^2}=\frac{u^2-20}{u^2}>0$$

から

$$\frac{4}{3}\leqq u+\frac{20}{u}-8\leqq\frac{5}{2}$$

ゆえに

$$\frac{2}{5} \leqq \frac{1}{u+\dfrac{20}{u}-8} \leqq \frac{3}{4}$$

だから $-(5-2s+s^2)=-(s-1)^2-4<0$ にも注意して

S_1+S_2 が最大値をとる t は

$$t=\frac{5-s}{5-2s+s^2}$$ …[答]

(4)　S_1+S_2 が $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大となるというのだから

(3)の結果より

$$\frac{5-s}{5-2s+s^2}=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 10-2s=5-2s+s^2$

$\Leftrightarrow s^2=5$

これと①より

$$s=-\sqrt{5}$$ …[答]