数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　$f(x)=x^3-3x$ より，　$f'(x)=3x^2-3$

L の方程式は

$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$　　すなわち

$y=(3t^2-3)x-2t^3$

曲線 C と接線 L の共有点の x 座標は

$x^3-3x=(3t^2-3)x-2t^3$

の実数解である。

$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$(x-t)^2(x+2t)=0$

$0<t<1$ のとき，　$-2t\neq t$ であるから，点 B の x 座標は $-2t$ である。

よって，点 B の座標は $(-2t,\ -8t^3+6t)$　…[答]

(2)　2 点 A，B の y 座標の差の絶対値を $g(t)$ とおくと

$$g(t)=|t^3-3t-(-8t^3+6t)|$$
$$=|9t^3-9t|$$
$$=9|t(t+1)(t-1)|$$

$0<t<1$ のとき，　$t(t+1)(t-1)<0$ であるから

$g(t)=-9t^3+9t$　　$(0<t<1)$

$$g'(t)=-9(3t^2-1)=-27\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	／	$+$	0	$-$	／
$g(t)$	(0)	↗	極大 $2\sqrt{3}$	↘	(0)

上の増減表より，　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $g(t)$ は最大となる。

よって，求める値は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ より　$\sin\theta \geqq 0$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

…[答]

(2)　$\cos\alpha = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$　よって　$\frac{\pi}{3} < \alpha \leqq \pi$ …①

$$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$ より $\alpha+\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$

①より $\alpha+\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} > \frac{\pi}{2}$

$$\sin\frac{5}{4}\pi \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

(1)より　$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}$

$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ より

$$-1 \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{2}+1}{3}$$

…[答]

(3)　$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2 = \sin 2\theta - (\sin\theta + \cos\theta) + 2$…②

$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin 2\theta$ だから

$\sin 2\theta = t^2 - 1$

②より　$f(\theta) = t^2 - 1 - t + 2$

$= t^2 - t + 1$

…[答]

(4)　$f(\theta) = t^2 - t + 1$　$\left(-1 \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{2}+1}{3}\right)$

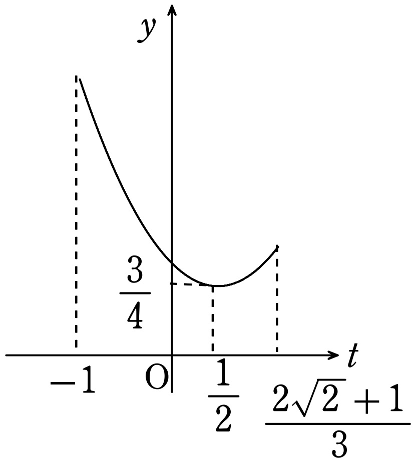
$$= \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$y=f(\theta)$ とする

右のグラフより

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(\theta)$ は最小値をとる。

よって，$f(\theta)$ の最小値は $\dfrac{3}{4}$ …[答]



高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$

条件より，$D<0$ であるから

$$D=k^2-4(3k-4)<0$$

$$k^2-12k+16<0$$

$$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$$

…[答]

(2)　与式より，$x^2=kx-3k+4$ となるから

$$\alpha^2=k\alpha+(4-3k)$$

$$\begin{aligned}\alpha^3&=\alpha^2\cdot\alpha\\&=k\alpha^2+(4-3k)\alpha\\&=k\{k\alpha+(4-3k)\}+(4-3k)\alpha\\&=k^2\alpha+(4k-3k^2)+(4-3k)\alpha\\&=(k^2-3k+4)\alpha+(4k-3k^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^4&=\alpha^3\cdot\alpha\\&=(k^2-3k+4)\alpha^2+(4k-3k^2)\alpha\\&=(k^2-3k+4)\{k\alpha+(4-3k)\}+(4k-3k^2)\alpha\\&=(k^3-3k^2+4k)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)+(4k-3k^2)\alpha\\&=(k^3-3k^2+4k+4k-3k^2)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)\\&=(k^3-6k^2+8k)\alpha+(4-3k)(k^2-3k+4)\end{aligned}$$

α は虚数，α^4 は実数であるから

$$k^3-6k^2+8k=0$$

$$k(k^2-6k+8)=0$$

$$k(k-2)(k-4)=0$$

$$k=0,\ 2,\ 4$$

$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ より，$k=2,\ 4$　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　題意より　$-3 \leqq s \leqq -1$ …①

であって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(2,0,1)+t(0,3,s)$$
$$=(2-2t,3t,1-t+st)$$

だから，求める方程式は

$$(x-2+2t)^2+(y-3t)^2+(z-1+t-st)^2=9$$ …[答]

(2)　(1)の結果と $z=0$ より

$$(x-2+2t)^2+(y-3t)^2=9-(-1+t-st)^2$$

よって

$$S_1=\pi[9-\{(1-s)t-1\}^2]$$ …[答]

(3)　(1)の結果と $x=0$ より

$$(y-3t)^2+(z-1+t-st)^2=9-4(1-t)^2$$

だから

$$S_2=\pi\{9-4(1-t)^2\}$$

これと(2)の結果より

$$S_1+S_2=\pi\{18-(1-s)^2t^2+2(1-s)t-1-4t^2+8t-4\}$$
$$=\pi\{-(5-2s+s^2)t^2+2(5-s)t+13\}$$
$$=\pi\left\{-(5-2s+s^2)\left(t-\frac{5-s}{5-2s+s^2}\right)^2+13+\frac{(5-s)^2}{5-2s+s^2}\right\}$$

ここで①より

$$5-s>0,\quad 5-2s+s^2=(s-1)^2+4>0$$

したがって

$$\frac{5-s}{5-2s+s^2}>0$$

また

$$1-\frac{5-s}{5-2s+s^2}=\frac{s^2-s}{5-2s+s^2}=\frac{s(s-1)}{(s-1)^2+4}>0$$

したがって

$$0<\frac{5-s}{5-2s+s^2}<1$$

S_1+S_2 が最大値をとる t は

$$t=\frac{5-s}{5-2s+s^2}$$ …[答]

(4)　S_1+S_2 が $t=\frac{1}{2}$ のとき最大となるというのだから

(3)の結果より

$$\frac{5-s}{5-2s+s^2}=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 10-2s=5-2s+s^2$

$\Leftrightarrow s^2=5$

これと①より

$$s=-\sqrt{5}$$ …[答]

高松高等予備校