数学 201 その 1

(1)　$t=\sin x+\cos x$

より

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x$$

すなわち

$$\sin 2x=t^2-1$$

よって

$$f(x)=2(t^2-1)-at+1=2t^2-at-1$$ …[答]

(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ ゆえ

$$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

よって

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$ …[答]

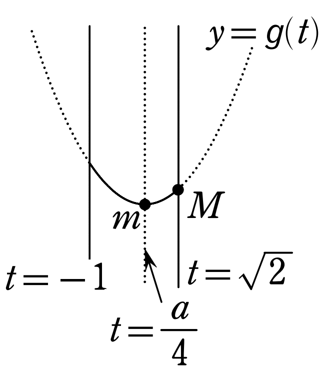
(3)　$f(x)=2t^2-at-1$

$$=2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}-1$$

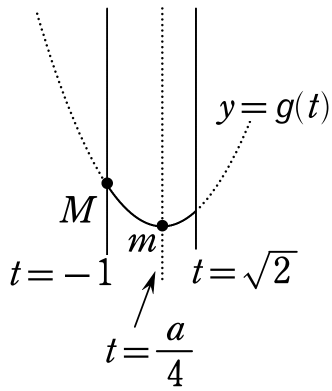
$$=g(t)\quad(-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

とする。 $a>0$ より $y=g(t)$ のグラフは a の値により次のようになる。

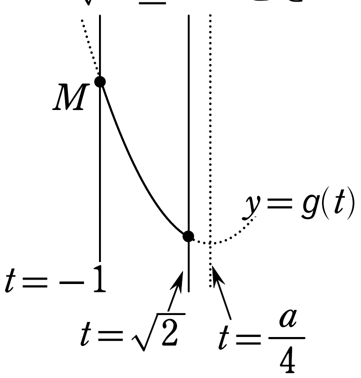
$0<a<2(\sqrt{2}-1)$ のとき



$2(\sqrt{2}-1)\leqq a<4\sqrt{2}$ のとき



$4\sqrt{2}\leqq a$ のとき



$f(x)$ の最大値 M と最小値 m は

$$\left.\begin{array}{ll} 0<a<2(\sqrt{2}-1) & \text{のとき } M=-\sqrt{2}\,a+3,\ m=-\dfrac{a^2}{8}-1 \\ 2(\sqrt{2}-1)\leqq a<4\sqrt{2} & \text{のとき } M=a+1,\ m=-\dfrac{a^2}{8}-1 \\ 4\sqrt{2}\leqq a & \text{のとき } M=a+1,\ m=-\sqrt{2}\,a+3 \end{array}\right\}\cdots[\text{答}]$$

高松高等予備校

数学 201 その 2

(1) $$a_{n+1}=\frac{4-a_n}{a_n-1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots①$$

$a_n=b_n+2$ とおいたとき

$$a_{n+1}=b_{n+1}+2$$

① に代入して

$$b_{n+1}+2=\frac{4-(b_n+2)}{b_n+2-1}=\frac{-b_n+2}{b_n+1}$$

$$b_{n+1}=\frac{-b_n+2}{b_n+1}-2$$

$$=\frac{-b_n+2-2b_n-2}{b_n+1}$$

$$=\frac{-3b_n}{b_n+1}$$

ゆえに $b_{n+1}=\dfrac{-3b_n}{b_n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(2) $b_n=\dfrac{1}{c_n}$ とおく。 $b_1=a_1-2=1$ だから明らかに $b_n\fallingdotseq 0$

(1) の結果より $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{b_n+1}{-3b_n}=-\dfrac{1}{3b_n}-\dfrac{1}{3}$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから, $c_{n+1}=-\dfrac{1}{3}c_n-\dfrac{1}{3}$

変形すると $c_{n+1}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(c_n+\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は

初項 $c_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{a_1-2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3-2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$ $(\because\ a_1=3)$

公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$c_n+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$c_n=\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{4}$$ …[答]

(3) $a_n = b_n + 2 = \dfrac{1}{c_n} + 2$

$$= \frac{4}{5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1} + 2 \quad ((2)\text{ より})$$

$\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} + 2\right\} = -4 + 2$$

$$= -2$$

∴ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -2$ …[答]

高松高等予備校

数学 201 その 3

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta$ だから　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\cos\theta$

$x>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から，両辺正より 2 乗しても同値であるから，両辺を 2 乗して整理すると

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)(2\cos^2\theta-1)=2$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\theta\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で $2\cos^2\theta-1\fallingdotseq 0$だから

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{2\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos 2\theta}$$ …[終]

(2)　$y=\dfrac{1}{x}$ は直線 $y=x$ に関して対称である。

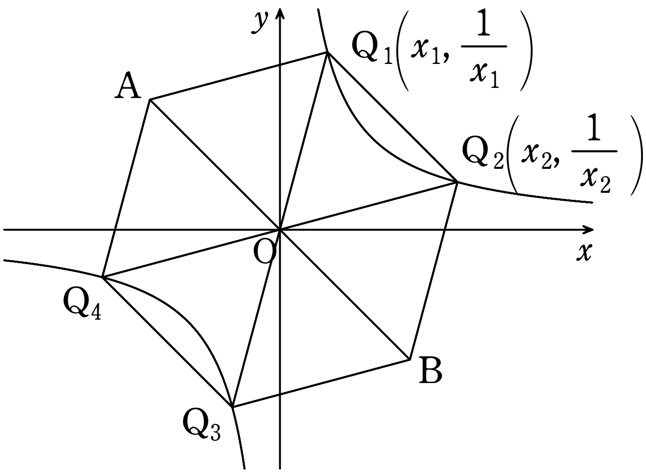
よって，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ を満たす Q はちょうど 2 個存在する。　…[終]

この 2 点をQ，Q′とおくと $\angle\mathrm{QOQ'}=\dfrac{\pi}{3}$ で，OQ＝OQ′だから△OQQ′は正三角形となる。

いま　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=4$ より，$\mathrm{Q}\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$に対して

$\mathrm{QQ'}=\mathrm{OQ}=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=2$ …[答]

(3)



題意の正六角形が存在するとき，△ $\mathrm{Q_1OQ_2}$ は正三角形となるので

$\angle \mathrm{Q_1OQ_2}=\dfrac{\pi}{3}$ より， $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

このとき $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4$ より $x^4-4x^2+1=0$ から $x^2=2\pm\sqrt{3}$

$0<x_1<x_2$ より $x_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$x_1=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

ゆえに $\mathrm{Q_1}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$， $\mathrm{Q_2}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$， $\overrightarrow{\mathrm{OQ_4}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}$

これより $\mathrm{Q_3}\left(-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mathrm{Q_4}\left(-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ_4}}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

よって $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$， $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ …[答]

高松高等予備校

数学 201 その 4

(1)　$C: y=e^{3x}$

について，　$y'=3e^{3x}$

だから，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{3t})$ における接線の方程式は

$$y=3e^{3t}(x-t)+e^{3t}$$
$$=e^{3t}(3x-3t+1)$$

法線の方程式は

$$y=-\frac{x-t}{3e^{3t}}+e^{3t}$$
$$=-\frac{x-t-3e^{6t}}{3e^{3t}}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(t-\frac{1}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{R}(t+3e^{6t},\ 0)$

である。ゆえに

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=e:9$$

より，$e\,\mathrm{PR}=9\,\mathrm{PQ}$

$$\Leftrightarrow\quad e^2\cdot 9e^{12t}\cdot\left(1+\frac{1}{9e^{6t}}\right)=81\cdot\frac{1}{9}\cdot(1+9e^{6t})$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{6t+2}=9$$

よって，$t=\dfrac{\log 3-1}{3}$ …[答]

(2)　(1) より

$$S(t)=\int_{t-\frac{1}{3}}^{t}e^{3x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{t-\frac{1}{3}}^{t}$$
$$=\frac{1}{3}e^{3t-1}(e-1)$$

だから，$S(t)=e-1$ となる条件は

$$e^{3t-1}=3$$

よって　$t=\dfrac{\log 3+1}{3}$ …[答]

(3)　$\mathrm{A}(t,\ 0)$ として

$$(\triangle \mathrm{PAQ})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3t}=\frac{e^{3t}}{6}$$

$$(\triangle \mathrm{PAR}) \backsim (\triangle \mathrm{QAP})$$

であって，相似比は　$e^{3t}:\frac{1}{3}=3e^{3t}:1$

だから，面積比は

$$9e^{6t}:1$$

よって

$$T(t)=(\triangle \mathrm{PQR})=\frac{(1+9e^{6t})e^{3t}}{6}$$

これと(2)の考察より

$$\frac{e^{6t}S(t)}{T(t)}=\frac{2e^{6t-1}(e-1)}{1+9e^{6t}}$$

$$=\frac{2(e-1)}{(e^{-6t}+9)e}$$

だから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{6t}S(t)}{T(t)}=\frac{2(e-1)}{9e}$$

…[答]

高松高等予備校